

Pierre Curie (autor)

Andrzej Ziółkowski (autor przekładu i komentarza)

ORCID [0000-0002-8248-228X](https://orcid.org/0000-0002-8248-228X)
 Institute of Fundamental Technological Research,
 Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland;
aziolk@ippt.gov.pl


O symetrii zjawisk fizycznych, symetrii pola elektrycznego i pola magnetycznego⁰

Abstrakt

W pracy klasyczne pojęcie symetrii ograniczone do obiektów geometrycznych (figur, brył), znajdujące swoje źródło w antycznej Grecji, zostało rozszerzone tak, by możliwe było badanie

⁰ (P⁰) przyp. tłum. Niniejszy dokument zawiera polskie tłumaczenie pracy Piotra Curie: Sur la symétrie dans les phénomènes physiques, symétrie d'un champ électrique et d'un champ magnétique. *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, 3e série, 1894, 3(1), ss. 393–415. DOI: [10.1051/jphystap:018940030039300](https://doi.org/10.1051/jphystap:018940030039300).

Do tekstu tłumaczenia wprowadzono, w formie Komentarza i przypisów końcowych tłumacza, dodatkowe wyjaśnienia i informacje mające na celu ułatwienie poprawnego zrozumienia tekstu bez konieczności szerokiej kwerendy w źródłach zewnętrznych. Przypisy te są oznaczone w tekście tłumaczonej pracy symbolami (P1), (P2), ..., zaś ich pełna treść znajduje się w Komentarzu dodanym na końcu tłumaczonej pracy.

INFORMACJA O PUBLIKACJI		e-ISSN 2543-702X ISSN 2451-3202		  BRYLANTOWY MODEL OTWARTEGO DOSTĘPU
CYTOWANIE Curie, Pierre; Ziółkowski, Andrzej (autor przekładu i komentarza) 2023: O symetrii zjawisk fizycznych, symetrii pola elektrycznego i pola magnetycznego. <i>Studia Historiae Scientiarum</i> 22, ss. 23–67. DOI: 10.4467/2543702XSHS.23.002.17693 .				
OTRZYMANO: 04.08.2022 ZAAKCEPTOWANO: 07.03.2023 OPUBLIKOWANO ONLINE: 05.10.2023	POLITYKA ARCHIWIZOWANIA Green SHERPA / RoMEO Colour	LICENCJA 		
WWW	https://ojs.ejournals.eu/SHS/ ; https://pau.krakow.pl/Studia-Historiae-Scientiarum/archiwum			

symetrii innych rodzajów obiektów. Poprzez wprowadzenie pojęcia *granicznych grup punktowych i elementów kinematycznych* charakteryzujących obiekt, którego symetria jest badana, określono, jakiego typu symetrie wykazują pole elektryczne i pole magnetyczne. Ustalono, że aby możliwe było zachodzenie jakiegos zjawiska, to charakterystyczna symetria ośrodka musi być zgodna z charakterystyczną symetrią występującego w nim zjawiska. Stwierdzono, także, że elementy symetrii przyczyn muszą znaleźć odzwierciedlenie w symetrii wywołanych skutków.

Słowa kluczowe: *symetria, dysymetria, graniczne grupy punktowe, symetria przyczyn i skutków, symetria pól fizycznych, symetria charakterystyczna zjawiska, symetria charakterystyczna ośrodka*

(Abstrakt i słowa kluczowe opracowane przez Andrzeja Ziółkowskiego)

On Symmetry in Physical Phenomena, Symmetry of an Electric Field and a Magnetic Field

Abstract

In the work, the classical concept of symmetry limited to geometric objects (figures, solids), which originated from ancient Greece, has been extended to allow for symmetry studies in other types of objects. By introducing concepts of *limit point groups* and *kinematic elements*, which characterize a studied object, it was determined what types of symmetries an electric field and a magnetic field exhibit. It was established that, in order for a phenomenon to occur, a characteristic symmetry of a medium must be consistent with the characteristic symmetry of the phenomenon occurring in it. It was also determined that elements of symmetry of causes must be reflected in the symmetry of the induced effects.

Keywords: *symmetry, dissymmetry, limit point groups, symmetry of causes and effects, symmetry of physical fields, characteristic symmetry of phenomenon, characteristic symmetry of medium*

(Abstract and keywords by Andrzej Ziółkowski)

1. Myślę, że byłoby korzystne wprowadzenie do badania zjawisk fizycznych rozważań na temat symetrii znanej krystalografom

Na przykład, ciało izotropowe można wprawić w ruch prostoliniowy lub w ruch obrotowy; ciecz może być siedliskiem ruchów wirowych; ciało stałe można ścisnąć lub skręcać; może ono znajdować się w polu elektrycznym lub magnetycznym; może przez nie przepływać prąd elektryczny lub ciepło; może przez nie przechodzić światło naturalne lub światło spolaryzowane prostoliniowo, kołowo, eliptycznie itp. We wszystkich tych przypadkach konieczne jest występowanie pewnej charakterystycznej dyssymetrii, w każdym punkcie ciała. Dyssymetrie będą jeszcze bardziej złożone, jeśli przyjmiemy, że kilka zjawisk współlistnieje w tym samym ośrodku lub jeśli te zjawiska są wywoływane w ośrodku krystalicznym, który już posiada – ze względu na swoją budowę, pewną dyssymetrię.

Fizycy często wykorzystują warunki wynikające z symetrii, jednakże na ogół pomijają zdefiniowanie symetrii samego zjawiska, ponieważ dość często warunki symetrii są proste i prawie oczywiste, *a priori*¹.

Jednak w nauczaniu fizyki lepiej byłoby jawnie sformułować te problemy, np. w badaniach nad elektrycznością, by stwierdzić niemal od razu istnienie charakterystycznej symetrii pola elektrycznego i pola magnetycznego; moglibyśmy wtedy wykorzystać te koncepcje po to, by uprościć wiele pokazowych eksperymentów.

Z punktu widzenia ogólnych idei, pojęcie symetrii można porównywać z pojęciem *wymiaru*: te dwa pojęcia podstawowe są charakterystykami odpowiednio dla *ośrodka*, w którym zachodzi zjawisko i dla *wielkości* służącej do oceny intensywności zjawiska.

Dwa ośrodki o tej samej dyssymetrii łączy szczególna więź, z której możemy wyciągnąć fizyczne konsekwencje. Relacja tego samego rodzaju istnieje pomiędzy dwiema wielkościami o tym samym wymiarze. Wreszcie, gdy pewne przyczyny wywołują określone skutki, to

¹ Krystalografowie, którzy muszą rozważać bardziej złożone przypadki opracowali ogólną teorię symetrii. W traktatach z zakresu krystalografii fizycznej (które są jednocześnie rzeczywistymi rozprawami fizycznymi) kwestie symetrii są wyłożone z najwyższą starannością. *Patrz* prace Mallarda (Mallard 1879; 1884), Liebischa (Liebisch 1891), Soreta (Soret 1893).

elementy symetrii przyczyn muszą znaleźć odzwierciedlenie w symetrii wywołanych skutków. Podobnie w równaniu zjawiska fizycznego istnieje związek przyczynowo-skutkowy pomiędzy wielkościami pojawiającymi się po obu stronach równania, i te wielkości po obu stronach mają ten sam wymiar.

2. Operacje odzyskiwania i elementy symetrii

Ustalenie różnych typów symetrii można podzielić na dwa wielkie obszary, w zależności od tego czy chodzi o określenie symetrii układu ograniczonego, czy układu, który można uznać za nieograniczony. Zajmiemy się tutaj tylko układem ograniczonym².

Rozważmy układ zdefiniowany za pomocą danych analitycznych i trzech ortogonalnych osi współrzędnych, na przykład. Układ będzie posiadał pewną *symetrię* ^(P1), jeśli przy użyciu innych ortogonalnych osi współrzędnych nadal będzie on zdefiniowany tymi samymi danymi analitycznymi.

Elementy (punkty, linie, płaszczyzny, itp.) zdefiniowane za pomocą tych samych danych analitycznych odniesione do takich różnych triad osi współrzędnych są elementami *homologicznymi* lub *tego samego rodzaju*. Operacja, która stanowi przejście od pierwszego układu do drugiego, jest *operacją odzyskiwania*^{3 (P2)}.

Istnieją dwa rodzaje triad ortogonalnych osi współrzędnych, symetrycznych względem siebie. Będziemy mieli *operację odzyskiwania* układu *pierwszego rodzaju*, gdy operacja taka stanowi przejście od jednej triady osi

² Teoria budowy ciał krystalicznych to nic innego jak ogólna teoria *symetrii ośrodka nieograniczonego o budowie periodycznej*. Jest to godna podziwu teoria, która została opracowana przez Bravais'ego (Bravais 1866), Jordana (Jordan 1868a; 1868b) oraz Fedorowa (Fedorow 1891; 1892). Niedawno, Schœnflies wydał wspaniały dydaktyczny traktat poświęcony tej teorii *Krystallsysteme und Krystallstruktur* (Schœnflies 1891).

Ciała krystaliczne można podzielić na 32 klasy (przyp. tłum. *punktowe grupy krystalograficzne* lub równoważnie klasy krystalograficzne), jeśli weźmiemy pod uwagę tylko symetrie zewnętrznego kształtu; ale teoria przewiduje dla wewnętrznej struktury tych substancji, 230 różnych typów symetrii (przyp. tłum. *przestrzenne grupy krystalograficzne*). Jeśli wszystkie te typy: znajdują się w przyrodzie, to jest to prawdziwe bogactwo dla fizyków, ponieważ mają wówczas do dyspozycji 230 ośrodków obdarzonych różnymi symetriami.

³ Operacja przetasowania według krystalografów niemieckich.

do drugiej identycznej. Operacja jest więc równoważna prostemu przemieszczeniu w przestrzeni ^(P3). Ma miejsce *powtarzanie się* tych samych elementów w układzie.

Będziemy mieli *operację odzyskiwania drugiego rodzaju lub transformację symetryczną we właściwym sensie*, gdy operacja stanowi przejście od jednej triady osi do innej symetrycznej do pierwszej. Układ jest wtedy identyczny ze swoim obrazem uzyskanym przez odbicie lustrzane.

Można łatwo wykazać, że podczas operacji odzyskiwania układu ograniczonego co najmniej jeden punkt zawsze pozostaje stały w przestrzeni. Wynika z tego, że ustalenie wszystkich możliwych typów symetrii układu ograniczonego sprowadza się do ustalenia *wszystkich rodzajów symetrii wokół punktu*, który jest środkiem kształtu układu.

Operacje odzyskiwania pierwszego rodzaju zawsze można uzyskać poprzez prosty obrót wokół *osi powtarzalności* (bardziej ogólnie nazywanej *osią symetrii*), przechodzącej przez punkt. Oś rzędu q (q jest liczbą całkowitą) da odzyskanie (przyp. tłum. pokrywanie się, niezmienniczość, stabilność) układu przy kątach obrotu $0, 1, 2, \dots, (q-1)$ razy $2\pi/q$ (przyp. tłum. *oś q-krotna, np. dwukrotna, trójkrotna etc.*).

Rozważymy *kierunek i zwrot* każdej osi układu, co podwaja liczbę osi; ponieważ dla jednej osi policzymy dwa kierunki zorientowane przeciwnie do siebie. Jeśli te dwie osie o przeciwnych zwrotach są innego rodzaju z punktu widzenia powtórzeń (na przykład oś piramidy regularnej) i rzędu q , to oznaczymy je przez (L_q, l_q) ^(P4).

Jeśli te dwie osie o przeciwnych zwrotach są tego samego rodzaju ze względu na powtórzenia (na przykład oś główna graniastosłupa) i rzędu q , to oznaczymy je przez $(2L_q)$. Mamy wtedy *oś podwójną* ^(P5). W takim przypadku w układzie z konieczności istnieje oś powtarzalności o parzystym rzędzie prostopadła do osi podwójnej, co umożliwia przekształcenie jej na siebie poprzez obrót o 180° , będący elementem operacji odzyskiwania układu.

Operacje odzyskiwania drugiego rodzaju można zawsze uzyskać poprzez odbicie lustrzane, któremu towarzyszy obrót wokół osi normalnej do płaszczyzny odbicia lustrzanego.

Należy rozważyć kilka przypadków:

1° Obrót wynosi zero; mamy proste odbicie lustrzane, a układ ma *płaszczyzną symetrii* (P).

2° Obrót jest równy 180° ; mamy środek symetrii (C).

3° Oś normalna do płaszczyzny odbicia jest osią powtórzeń rzędu q i mamy q przekształceń symetrycznych; każda z tych operacji składa się z jednego odbicia lustrzanego, po którym następuje jeden z obrotów

$$\frac{2\pi}{q}, \quad 2\frac{2\pi}{q}, \quad \dots, \quad (q-1)\frac{2\pi}{q};$$

mamy wtedy *prostą płaszczyznową symetrii rzędu q* , którą oznaczymy przez P_q .

4° Oś normalna do płaszczyzny odbicia jest osią powtórzeń rzędu q i mamy q transformacji symetrycznych; każda z tych operacji składa się z odbicia lustrzanego, po którym następuje jeden z obrotów

$$\frac{1}{2}\frac{2\pi}{q}, \quad \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{q}, \quad \left(2 + \frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{q}, \dots, \quad \left(q - 1 + \frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{q}$$

wokół osi. Mamy wtedy *alternatywną płaszczyznową symetrii rzędu q* , oznaczmy ją przez π_q .

Przedstawiony na Rysunku 1. model ma oś 4 rzędu z płaszczyzną P_4 prostej symetrii 4 rzędu. Cztery strzałki dolne uzyskuje się przez proste odbicie lustrzane czterech górnych strzałek i odwrotnie. Układ można odzyskać przez proste odbicie lustrzane i towarzyszący mu obrót o 90° , powtórzony pewną liczbę razy.

Model na Rysunku 2. ma oś 4 rzędu oraz płaszczyznę π_4 symetrii alternatywnej 4 rzędu, prostopadłą do kierunku osi. Cztery dolne strzałki różnią się położeniem z obrazami czterech górnych strzałek otrzymanych przez proste odbicie lustrzane. Układ można odzyskać przez odbicie lustrzane, po którym następuje obrót o 45° nieparzystą liczbę razy.

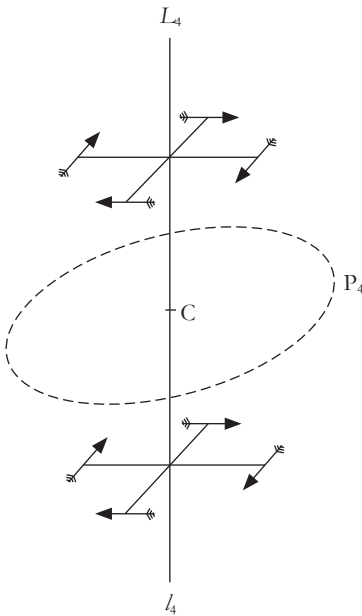
Warto zauważyć, że model na Rysunku 2. jest nakładalny na swój obraz lustrzany, chociaż nie ma on ani płaszczyzny, ani środka symetrii. Jest tylko płaszczyzna symetrii alternatywnej⁴.

3. Grupy operacji odzyskiwania

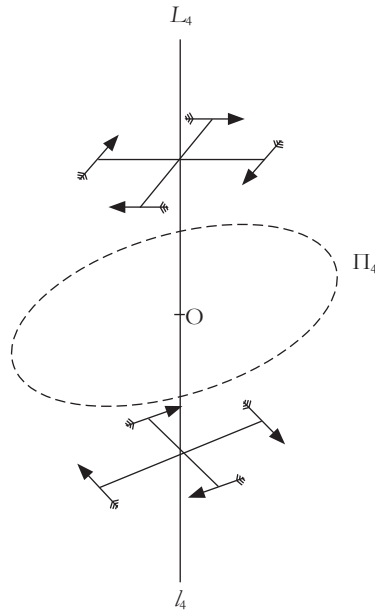
Wszystkie operacje odzyskiwania układu są definiowane przy użyciu elementów symetrii, które właśnie wymieniliśmy.

Grupa operacji odzyskiwania będzie połączeniem operacji w taki sposób, że dwie dowolne operacje przeprowadzone kolejno dadzą taki sam

⁴ P. Curie (Curie 1884, ss. 89, 418).



Rys. 1.



Rys.2.

wynik jak ten, który otrzymuje się poprzez pojedynczą operację wchodzącą w skład grupy.

Podajemy tutaj pełną tabelę wszystkich grup operacji odzyskiwania względem punktu. Operacje te są całkowicie określone poprzez wymienienie elementów symetrii.

Widzimy, że grupy elementów symetrii można podzielić na *siedem klas* różniących się między sobą charakterem grupy osi, które zawierają (przyp. tłum. wprowadzony poniżej podział na klasy symetrii oparty jest na innych kryteriach w porównaniu do klasycznego podziału na układy krystalograficzne, choć jest do niego analogiczny). Każda klasa może istnieć z lub bez transformacji symetrycznej we właściwym sensie (przyp. tłum. tzn. w rozumieniu autora odbicia lustrzanego). Zwykle istnieje kilka sposobów nadania symetrii we właściwym sensie grupie, która nie zawiera niczego poza osiami. Otrzymujemy łącznie 19 rodzin f . Rozważmy na przykład klasę III i założmy, że $q = 3$, będziemy mieli grupę osi $2L_3, (3L_2, 3L'_2)$, to znaczy podwójną oś główną rzędu 3, oraz trzy osie dwukrotne i te o przeciwnym zwrocie innego rodzaju $3(L_2, L'_2)$; te trzy osie są prostopadłe do osi głównej i tworzą między sobą

Pierre Curie (autor), Andrzej Ziółkowski (autor przekładu i korektury)
 O symetrii zjawisk fizycznych, symetrii pola elektrycznego i pola magnetycznego

Tabela 1. (90)

Klasa	Osie powtarzalności (symetrii obrotowej)	Rodzina	Transformacje symetrii	N	Przykłady (układ krystalograficzny)	Notacja międzyn.
I.	(Brak osi symetrii)	1	O	1		1
		2	P	2		m
		3	C	2	Równoległoscian (trójskośny)	$\bar{1}$
		4	O	q $q = 2$	kwas winowy (jednoskośny)	2
II.	I_{q^k} (oś i jej inwersja)	5	P_q	$\begin{cases} q = 2 \\ 2q \\ q = 6 \\ q = \infty \end{cases}$	gips (jednoskośny) apatyt (heksagonalny) pole magnetyczne	$2/m$ $6/m$ ∞/m
		6	π_q	$2q$ $\begin{cases} q = \infty \\ q = 3 \end{cases}$	pole magnetyczne dioptryza (trygonalny)	∞/m $\bar{3}$
		7	qP	$2q$ $\begin{cases} q = 3 \\ q = \infty \end{cases}$	turmalin (trygonalny) pole elektryczne, stoż. ucięty	$3m$ ∞m
III.	$2I_{q^k}, qI_{2^k}, qI_{2^k}'$ (oś główna podwójna)	8	O	$2q$ $\begin{cases} q = 3 \\ q = \infty \end{cases}$	Kwarc (trygonalny) skręcone włókno	32 $\infty 2$
		9	P_{q^k}, qP	$4q$ $\begin{cases} q = 3 \\ q = \infty \end{cases}$	graniastosłup o podst. trójkątnej walec	$\bar{6}2m$ ∞mm

	10	π_{up}, qP	$\begin{cases} q = \infty \\ 4q \\ q = 3 \\ q = 2 \end{cases}$	walec romboedr, szpat (trygonalny) sfenoedr (tetragonalny)	∞mm $\bar{5} m$ $\bar{4} 2 m$
IV.	11	O	12	chloran sodu (kubiczny)	23
	12	$4P_3, 3P_2, C$	24	Pyryt (kubiczny)	$m\bar{3}$
	13	$3P_2, 6P$	24	czworościan foremny, blendy cynkowa ZnS (kubiczny)	$\bar{4} 3 m$ $\bar{4} 3 m$
V.	14	O	24	kupryt (kubiczny)	$4/m\bar{3} 2/m$
	15	$3P_4, 4P_3, 6P_2, C$	48	sześcian, ośmiościan foremny	$4/m\bar{3} 2/m$
VI.	16	O	60		
	17	$6P_5, 10P_3, 15P_2, C$	120	Dwudziestościan foremny, dwunastościan foremny	$\bar{5} \bar{3} m$ 5.3.2
VII.	18	O	∞	kula wypełniona płynem w ruchu z wirami	$\infty \infty$
	19	$\infty P_5, C$	∞	kula	$\infty \infty m$

W Tabeli 1.:

(L_q, l_q) oznacza oś rzędu (krotności) q , i oś o przeciwnym zwrocie innego rodzaju,

$(2L_q)$ oś podwójną rzędu q , C środek symetrii, P płaszczyznę symetrii,

P_q prostą płaszczyznę symetrii rzędu q ,

π_q alternatywną płaszczyznę symetrii rzędu q .

(Przyp. tłum.: O oznacza „punkt pomocniczy” – to nie jest środek symetrii, por. Rysunek 2. Informacje o układzie krystalograficznym w przedostatniej kolumnie i ostatnia kolumna zawierająca oznaczenia według klasyfikacji Hermann–Mauguina (H–M) zostały dodane przez tłumacza.)

kąty 120° . Układ ten może istnieć bez żadnego innego elementu symetrii [rodzina (8), krystaliczna postać kwarcu], lub z płaszczyzną symetrii rzędu 3 prostopadłą do osi głównej (P_3) i 3 płaszczyznami symetrii $3P$ zawierającymi oś główną i osie dwukrotne [rodzina (9) graniastosłup o podstawie trójkątnej]. Nadal możemy mieć układ symetryczny [rodzina (10), romboedr (rombościan)] z alternatywną płaszczyzną symetrii π_3 prostopadłą do osi głównej, 3 płaszczyznami symetrii zawierającymi oś główną i prostopadłymi do osi dwukrotnych i ze środkiem symetrii.

Każda rodzina klas II i III zawiera nieskończoną liczbę grup, q może być dowolną liczbą całkowitą. Rodziny pozostałych klas zawierają tylko jedną grupę.

W rodzinach (5) i (9) występuje środek symetrii, gdy q jest rzędu parzystego. W rodzinach (6) i (10), istnieje środek symetrii, gdy q jest rzędu nieparzystego.

W klasie III osie L_2 i L'_2 pokrywają się, ale mają przeciwne zwroty, jeśli q jest nieparzyste. Wręcz przeciwnie; mamy osie dwukrotne podwójne dwóch różnych rodzajów, jeśli q jest parzyste.

Wartości N określają rząd każdej grupy. N to liczba punktów homologicznych (przyp. tłum. pozycji równoważnych) pomiędzy nimi w układzie wtedy, gdy rozpatrywane punkty nie znajdują się na żadnej osi, ani na żadnej płaszczyźnie symetrii. N to także liczba ortogonalnych triad osi współrzędnych, w których układ wygląda tak samo.

Układów mających symetrię rodzin 1, 4, 8, 11, 14, 16, 18, które zawierają tylko osie, nie można nałożyć na ich obraz uzyskany przez odbicie lustrzane, mają one *dysymetrię enancjomorficzną*⁵.^(P7)

Bardzo ważnym pojęciem, z punktu widzenia naszych obecnych zainteresowań, jest pojęcie *podgrup*. (Przyp. tłum.: Występujące w oryginalnie określenie *intergroupe zastąpiono współcześnie używaną nazwą podgrupa*.) Grupa elementów symetrii jest podgrupą szerszej grupy symetrii, gdy wszystkie operacje odzyskiwania z pierwszej grupy są częścią operacji odzyskiwania drugiej.

I tak na przykład rodzina (13) o symetrii tetragonalnej jest podgrupą rodziny (15) symetrii kubicznej. Grupa (L_6, l_6), $6P$ rodziny (7) (symetria ostrosłupa sześciokątnego foremego) to podgrupa grupy

⁵ Szczegółowe informacje można znaleźć w traktatach o krystalografii. Zobacz też BRAVAIS (BRAVAIS 1866), JORDAN (JORDAN 1868), P. CURIE (CURIE 1884, s. 418).

$\frac{2L_6}{P_6}, \frac{6L_2, 6L'_2}{6P_2}, C$ rodziny (9) (graniastosłup sześciokątny regularny).

Rodzina (4) jest podgrupą rodzin (5), (6), (7), (8), (9), (10) dla tej samej wartości q itd.

4. Charakterystyczna dyssymetria zjawisk fizycznych

Rozważmy teraz dowolny punkt ośrodka w dowolnym stanie fizycznym. Symetrię w tym punkcie będzie z konieczności charakteryzować jedna z grup z Tabeli 1.⁶

Sformulujemy następujące twierdzenia:

Symetria charakterystyczna zjawiska to maksymalna symetria zgodna z występowaniem tego zjawiska.

Zjawisko może występować w ośrodku, który ma symetrię charakterystyczną tego zjawiska lub symetrię jednej z podgrup jego symetrii charakterystycznej.

Innymi słowy pewne elementy symetrii ośrodka mogą, ale nie muszą, współwystępować z pewnymi symetrami zjawiska. To co jest konieczne, to by pewne elementy symetrii nie występowały. *To dyssymetria generuje występowanie zjawiska.*

O wiele bardziej logiczne byłoby nazwanie płaszczyzną dyssymetrii każdej płaszczyzny, która nie jest płaszczyzną symetrii; osią dyssymetrii każdej osi, która nie jest osią symetrii itd., i ogólnie, by podać listę operacji, które nie są operacjami odzyskiwania w danym układzie. To właśnie te operacje wskazują na istnienie dyssymetrii i w konsekwencji na możliwość występowania pewnej własności w układzie.

⁶ Niektóre umysły mogą wahać się przed przeniesieniem do ośrodka w dowolnym stanie fizycznym klasyfikacji, która po raz pierwszy została ustalona z punktu widzenia czystej geometrii. Zwróćmy uwagę, że możemy sprowadzić całe rozumowanie, które służy do ponownego ustanowienia grup, do następującej postaci: niech A, B, C będą trzema triadami ortogonalnych osi współrzędnych, w których układ przedstawia się tak samo, niech D będzie czwartym układem ortogonalnych osi współrzędnych, który jest umieszczony względem C, tak samo jak B względem A; D nadal będzie triadą osi współrzędnych, w którym układ będzie przedstawiał się tak samo jak w A, B, C. Sposób rozumowania nie przesądza niczego o naturze układu.

Lecz w grupach, które rozważamy, istnieje nieskończona liczba operacji, które nie prowadzą do odzyskiwania układu i ogólnie skończona liczba operacji odzyskiwania; dlatego znacznie łatwiej jest podać listę tych ostatnich operacji.

Widzimy również, że gdy kilka zjawisk o różnej naturze nakłada się na siebie tworząc jeden układ, to dyssymetrie się sumują. Wówczas pozostają w układzie tylko te elementy symetrii, które są wspólne dla wszystkich zjawisk rozpatrywanych z osobna (przyp. tłum. stwierdzenie powyższe znane jest jako *Zasada Superpozycji Dyssymetrii*).

Skoro pewne przyczyny wywołują określone skutki, to elementy symetrii przyczyn muszą znaleźć odzwierciedlenie w elementach symetrii wywołanych skutków.

Gdy pewne skutki wykazują pewną dyssymetrię, to ta dyssymetria musi przejawiać się w przyczynach, które te skutki spowodowały.

Stwierdzenia odwrotne do podanych powyżej nie są prawdziwe, przynajmniej w praktyce, to znaczy, że wywołane skutki mogą być bardziej symetryczne niż wywołujące je przyczyny.

Niektóre dyssymetrie przyczyn mogą nie mieć wpływu na pewne zjawiska lub przynajmniej mieć wpływ zbyt słaby, by go uwzględnić, co sprowadza się w praktyce do tego samego jakby taki wpływ nie istniał.

Interesującym jest, z punktu widzenia zjawisk fizycznych, rozpatrzenie osobno grup posiadających oś izotropii. Takich grup jest pięć; oznaczmy je przez (a), (b), (c), (d), (e) (przyp. tłum. patrz także Rysunek S4 i Rysunek S5 w Komentarzu tłumacza).

$$\begin{array}{l}
 (a) \quad \left. \begin{array}{l} \frac{2L_{\infty}}{P_{\infty}}, \frac{\infty L_2}{\infty P_2}, C \\ \text{Np.: Walec,} \\ \text{Ciało ściśnięte} \\ \text{w jednym kierunku} \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 (b) \quad \begin{array}{l} 2L_{\infty}, \infty L_2 \\ \text{Skęcany Walec} \end{array} \\
 (c) \quad \begin{array}{l} (L_{\infty} l_{\infty}), \infty P_1 \\ \text{Stożek ucięty,} \\ \text{Pole elektryczne} \end{array} \\
 (d) \quad \begin{array}{l} \frac{L_{\infty} l_{\infty}}{P_{\infty}}, C \\ \text{Obracający się Walec,} \\ \text{Pole magnetyczne} \end{array}
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} (a) \\ (b) \\ (c) \\ (d) \end{array}} \right\} (e) \quad \begin{array}{l} (L_{\infty} l_{\infty}) \\ \text{Obracający się} \\ \text{Stożek ucięty} \end{array}$$

Grupa cylindryczna (a), najbardziej symetryczna, ma elementy symetrii walca kołowego: tj. podwójną oś izotropii w $2L_{\infty}$, z nieskończoną ilością osi dwukrotnych, podwójnych ∞L_2 prostopadłych do osi głównej i przechodzących przez środek kształtu układu, płaszczyznę symetrii prostej P_{∞} rzędu ∞ ortogonalną do osi głównej, nieskończoną ilość płaszczyzn symetrii prostej ∞P_2 , rzędu 2, zawierających oś główną, środek symetrii C .

Jeśli ciało izotropowe zostanie ściśnięte w określonym kierunku, to staje się ono anizotropowe i ma symetrię grupy cylindrycznej (a). Wiadomo, że ciało ściśnięte w taki sposób ma własności optyczne takie jak kryształy z osią optyczną; symetria (a) to dokładnie maksymalna symetria zgodna z występowaniem tego zjawiska. Ciała krystaliczne z osią optyczną mają symetrie, które są podgrupami symetrii (a).

Pozostałe grupy (b), (c), (d), (e), z osią izotropii, są podgrupami grupy cylindrycznej (a).

Grupa (b) ma zawsze podwójną oś izotropii i osie dwukrotne; ale nie posiada już ani środka, ani płaszczyzn symetrii. Grupa (b) jest holoaksjalną podgrupą grupy (a). Grupa (b) ma symetrię walca lub włókna, skręcanego wokół własnej osi (przyp. tłum. patrz Rysunek S4 w Komentarzu tłumacza). Jest to symetria środka kształtu układu utworzonego z dwóch identycznych walców z osiami w jednej linii obracających się wokół tej osi z równymi prędkościami kątowymi w przeciwnych kierunkach. *Symetria skrętna* (b) nie posiada innych elementów symetrii oprócz osi powtarzalności (osi symetrii obrotowej), posiada ona dyssymetrię nienakładaną (enancjomorfię), która jest konieczna dla wystąpienia zjawiska polaryzacji obrotowej zwykłej ciał aktywnych. Można również powiedzieć, że symetrię (b) można uzyskać, jeśli walec wypełni się cieczą mającą własność polaryzacji rotacyjnej. Krystaliczna postać kwarcu $2L_3, 3(L_3L'_2)$ ma symetrię podgrupy grupy (b).

Grupa (c) posiada oś izotropii i tę o przeciwnym zwrocie innego rodzaju ($L_{\infty} l_{\infty}$); ta oś nie jest więc już podwójna (innymi słowy, oś ta nie jest już równoważna pod względem zwrotu). Grupa (c) nadal ma nieskończoną liczbę płaszczyzn symetrii zawierających oś izotropii; ale nie ma już ani płaszczyzny symetrii ortogonalnej do osi, ani środka symetrii, ani osi dwukrotnych grupy cylindrycznej. Jest to symetria dowolnego punktu na osi okrągłego uciętego stożka (przyp. tłum. patrz także Rysunek S4 w Komentarzu tłumacza). Jest to symetria siły, prędkości, pola powszechnego ciężenia; to wreszcie *symetria pola elektrycznego*. Wszystkie

te zjawiska, bardzo trafnie z punktu widzenia symetrii, są reprezentowane strzałką.

Rozważmy na przykład pole powszechnego ciężenia; sfera materialna M o środku w punkcie O oddziałuje na zewnętrzny punkt A , poprzez wytworzenie tam pola przyciągania newtonowskiego. Jeśli przyjmiemy, że materiał, z którego wykonana jest sfera M sam z siebie nie wnosi żadnej dyssymetrii, to widzimy, że prosta OA jest osią izotropii taką, że każda płaszczyzna przechodząca przez OA jest płaszczyzną symetrii, i są to jedyne elementy symetrii przechodzące przez punkt A . Jest to symetria grupy (c). Stąd wynika, że pole przyciągania newtonowskiego może występować w ośrodku o symetrii (c) lub jednej z jej podgrup; co więcej nie można sobie wyobrazić, by symetria ośrodka mogłaby być większa niż (c), ponieważ w takim przypadku musiałaby to być symetria grupy cylindrycznej (a) lub symetria sfery kulistej (19) patrz Tabela 1., a pole nie mogłoby mieć *zwrotu*, i tak samo byłoby z siłami i prędkościami. Jeśli w punkcie A umieścimy sferę materialną, to na materię tę będzie działać siła. Ciało będzie mogło wtedy przejść w stan ruchu w kierunku AO , osiągnąć określoną prędkość – i nic w tym procesie nie zakłóci symetrii układu. Zatem (c) reprezentuje jednocześnie symetrię siły działającej na ważką materię i symetrię ważkiej materii rozprędzanej do określonej prędkości.

Aby ustalić symetrię pola elektrycznego, założmy, że pole to jest wytwarzane przez dwie okrągłe płytki z cynku i miedzi ustawione naprzeciw siebie, podobnie jak płytki kondensatora powietrznego. Rozważmy punkt między dwiema płytkami leżący na wspólnej osi; widzimy, że ta oś jest osią izotropii i że każda płaszczyzna zawierająca tę oś jest płaszczyzną symetrii. Elementy symetrii przyczyn należy znaleźć w wytworzonych skutkach; dlatego pole elektryczne jest zgodne z symetrią (c) i jej podgrupami.

Grupa (a) symetrii cylindrycznej i rodzina (19) symetrii sferycznej to jedyne grupy zawierające podgrupę (c). Jest zatem mało prawdopodobne, aby pole elektryczne miało symetrię większą niż (c). Ten ostatni punkt można zresztą wykazać rygorystycznie, jeśli przyjmiemy, że siła działająca na ciało ważkie ma grupę (c) jako symetrię charakterystyczną, jak to widzieliśmy powyżej. Założmy, że w przestrzeni znajduje się izolowana, przewodząca kula naładowana elektrycznością, a następnie z jakiejś przyczyny pojawia się pole elektryczne. Na kulę zacznie działać siła o kierunku tego pola. Dyssymetrii tego działania należy poszukiwać w przyczynach, które je wywołały; ponieważ siła nie ma osi symetrii

prostopadłej do kierunku jej działania, to układ naładowanej kuli i pola również nie może mieć tego elementu symetrii. Jednakże naładowana kula, rozpatrywana oddzielnie od pola, posiada osie izotropii we wszystkich kierunkach; zatem dyssymetria, o której mowa, może być spowodowana jedynie przez pole elektryczne, które nie może mieć osi symetrii prostopadłej do swojego kierunku. Dlatego pole elektryczne nie może uzyskać symetrii cylindrycznej lub sferycznej, zaś jego symetrią charakterystyczną jest symetria grupy (c). Symetria prądu elektrycznego i polaryzacji dielektrycznej jest z konieczności taka sama jak symetria pola, które wywołuje te zjawiska.

Zjawiska piroelektryczne i piezoelektryczne stanowią nowe potwierdzenie poprzednich wniosków na temat symetrii charakterystycznej pola elektrycznego. Krysztal turmalinu, na przykład, polaryzuje się elektrycznie w kierunku swojej osi trójkratnej przy jego podgrzewaniu lub ściskaniu w kierunku tej osi. Złoto przy ogrzewaniu lub ściskaniu w żaden sposób nie zmienia swojej symetrii krystalicznej, którą jest $(L_3, I_3)3P$, tj. oś trójkratna (i oś o przeciwnym zwrocie innego rodzaju), którą zawierają trzy płaszczyzny symetrii; jest to symetria podgrupy (c) $(L_\infty, I_\infty)\infty P$, zatem symetria ta jest kompatybilna z występowaniem *polaryzacji dielektrycznej wzdłuż osi*.

Zauważmy na koniec, że pole elektryczne wywołuje w cieczech te same zjawiska optyczne, jakie uzyskuje się przez ściskanie w ciałach stałych (zjawisko Kerra). Symetrią charakterystyczną tych zjawisk jest symetria cylindryczna (a), której grupa (c) jest podgrupą; widzimy zatem, że zjawisko Kerra ujawnia tylko część dyssymetrii charakterystycznej pola elektrycznego. Zjawisko dylatacji elektrycznej (zjawisko Dutera) ujawnia jedynie dyssymetrię grupy (a).

Grupa (d) ma oś izotropii i oś o przeciwnym zwrocie innego rodzaju (L_∞, I_∞) : oś ta nie jest więc podwójna ze względu na powtarzanie (przyp. tłum. tutaj obroty); ale układ ma środek symetrii i płaszczyznę symetrii rzędu ∞ prostopadłą do osi. Osie L_∞ i I_∞ o przeciwnych zwrotach są zatem symetryczne względem siebie, i można powiedzieć, że oś izotropii jest podwójna przez symetrię. Grupa nie ma ani osi dwukrotnych, ani płaszczyzn symetrii zawierających oś główną grupy cylindrycznej (a). Grupa (d) określa symetrię środka kształtu walca cylindrycznego, który obraca się wokół własnej osi z pewną prędkością. Znowu musimy odwołać się do tej symetrii w przypadku momentu obrotowego, prędkości kątowej, *pola magnetycznego*.

Ustalmy, na przykład, charakterystyczną symetrię pola magnetycznego. Rozważmy w tym celu pole magnetyczne, które istnieje w środku obwodu kołowego, przez który przepływa prąd elektryczny; pole to jest skierowane prostopadle do płaszczyzny obwodu. Ustalmy symetrię przyczyny, to znaczy symetrię środka obwodu, przez który przepływa prąd. Przede wszystkim mamy tu oś izotropii prostopadłą do płaszczyzny obwodu przepływu prądu. Prąd elektryczny jest kompatybilny z istnieniem płaszczyzn symetrii zawierających kierunek przepływu prądu; zatem płaszczyzna obwodu będzie płaszczyzną symetrii. Prąd elektryczny nie dopuszcza istnienia ani osi powtarzalności, ani płaszczyzn symetrii prostopadłej do swego kierunku. Nie ma zatem osi symetrii w płaszczyźnie obwodu ani płaszczyzn symetrii zawierających oś izotropii. Dlatego symetria przyczyn to grupa symetrii $(d) (I_\infty, l_\infty) / P_\infty, C$. Te elementy symetrii są kompatybilne z istnieniem pola magnetycznego przechodzącego przez oś izotropii; ponieważ elementy symetrii przyczyn znajdują się w wytworzonych skutkach.

Widzimy, że pole magnetyczne może mieć płaszczyznę symetrii prostopadłą do swojego kierunku. Oprócz tego pole magnetyczne nie dopuszcza istnienia dwukrotnych osi symetrii prostopadłych do jego kierunku. Aby to udowodnić, posłużymy się zjawiskiem indukcji. Rozważmy na przykład prosty przewód poruszający się z pewną prędkością prostopadłą do jego kierunku. Taki układ ma oś dwukrotną w kierunku prędkości. Załóżmy teraz, że istnieje pole magnetyczne w kierunku prostopadłym do kierunku drutu i prędkości poruszania się; w przewodzie pojawi się siła elektromotoryczna indukcji. Zjawisko to jest niezgodne z istnieniem osi dwukrotnej skierowanej w kierunku przemieszczania, to jest prostopadle do drutu. Dyssymetria skutków powinna odnaleźć się w przyczynach; konieczne zniknięcie dwukrotnej osi symetrii, o którym mówiliśmy, może pochodzić tylko od obecności pola magnetycznego; to ostatnie nie może mieć zatem dwukrotnej osi symetrii prostopadłej do jego kierunku. (Ten sam wywód można przeprowadzić, rozważając obwód kołowy prostopadły do pola magnetycznego. Można by przyjąć, że obwód ten rozszerza się bez zmiany jego kształtu, powodując powstanie prądu indukcyjnego.)

Grupy cylindryczne (a) i sferyczne (19) mają, jako podgrupę symetrię (d), ale istnienie w tych grupach osi prostopadłych pomiędzy nimi pokazuje, że nie są one właściwe dla reprezentowania symetrii pola

magnetycznego. Pole magnetyczne jest zatem kompatybilne tylko z grupą (d) i jej podgrupami⁷.

Zjawisko rotacyjnej polaryzacji magnetycznej dodatkowo potwierdza ten wniosek⁸.

Ciało spolaryzowane magnetycznie ma taką samą symetrię jak pole magnetyczne.

Zjawiska dylatacji magnetycznej żelaza ujawniają jedynie dyssymetrię grupy cylindrycznej (a), której (d) jest podgrupą.

Duża liczba kryształów charakteryzuje się grupami symetrii, które są podgrupami symetrii magnetycznej, takie np. jak apatyt (L_6, l_6)/ P_6 , C, gips, chlorek żelaza, amfibol (L_2, l_2)/ P_2 , C. Możliwe, że kryształy te zostały namagnesowane naturalnie na skutek swojej budowy. Bezskutecznie próbowałem ustalić tę polaryzację poprzez doświadczenia.

Zazwyczaj pole magnetyczne przedstawia się za pomocą strzałki; taka reprezentacja, często nieprowadząca do nieporozumień, jest niepoprawna merytorycznie ze szczególnego punktu widzenia symetrii, ponieważ pole magnetyczne nie ulega zmianie na skutek odbicia lustrzanego względem płaszczyzny prostopadłej do swojego kierunku, zmienia zaś zwrot przy odbiciu lustrzanym względem płaszczyzny zawierającej jego kierunek. W przypadku reprezentacji strzałkowej jest dokładnie odwrotnie.

Grupa (e) ma tylko oś izotropii (L_∞, l_∞), niepodwójną. Grupa (e) jest podgrupą wspólną dla czterech grup symetrii (a), (b), (c), (d); posiada połączone dyssymetrie wszystkich tych czterech grup. Zatem jest zgodna z istnieniem zjawisk, których symetrią charakterystyczną jest którakolwiek symetria charakterystyczna czterech pozostałych grup. Grupa (e) ma dyssymetrię enancjomorficzną.

Pięć grup (a), (b), (c), (d), (e) jest powiązanych ze sobą jak typy symetrii tego samego układu krystalograficznego. Jeśli zapożyczymy

⁷ P. Curie (Curie 1884, s. 418; 1893). Lord Kelvin przypuszczał, że namagnesowanie jest spowodowane deformacją szczególnego ośrodka. Ta deformacja jest po prostu rotacją, która w tym bardzo szczególnym ośrodku powoduje pojawienie się przeciwdziałającego momentu sprężystego. Zobacz: *Tłumaczenie Wykładów Sir Thomasona*, Notatka M. Brillouina. Ta koncepcja jest całkowicie zgodna z powyższą symetrią.

⁸ Aby właściwie zająć się problemem polaryzacji rotacyjnej z punktu widzenia symetrii, konieczne jest wprowadzenie elementów symetrii charakterystycznych dla ośrodków nieograniczonych, o których nie mówiliśmy. Ciało, przez które przechodzi spolaryzowany kołowo promień światła, ma na przykład helikoidalną oś izotropii.

języka krystalografów, to powiemy, że grupa (a) daje pełną lub holodryczną symetrię układu cylindrycznego. Grupa (b) odpowiada hemiedrii holoaksjalnej (hemiedria ukośna lub hemiedria enancjomorficzna). Grupa (c), to hemiedria hemimorficzna (hemiedria z nierównoległymi ścianami). Grupa (d), to parahemiedria (hemiedria z równoległymi ścianami); wreszcie grupa e) odpowiada tetartoedrii. ^(P8)

Chociaż każda grupa zawiera nieskończoną liczbę transformacji odzyskujących możemy jednak powiedzieć, że grupy (b), (c) i (d) zawierają tylko połowę, a grupa e) tylko jedną czwartą transformacji odzyskujących grupy (a).

Modele pokazane na Rysunkach 3, 4, 5, 6, 7 dają dla różnych orientacji strzałek różne podgrupy z osią główną 4 rzędu grup (a), (b), (c), (d), (e).

Rysunek 3 ukazuje [rodzina (9) $q = 4$] podgrupę grupy (a) cylindrycznej; jest to symetria prostego graniastosłupa o podstawie kwadratowej. Przez oś główną przechodzą cztery płaszczyzny symetrii, dwie pierwszego rodzaju przechodzą przez strzałki, pozostałe drugiego rodzaju są dwusiecznymi kątów utworzonych pomiędzy dwoma poprzednimi. Na rysunku pokazane są położenia osi dwukrotnych podwójnych L_2 i L'_2 oraz płaszczyzny P_4 prostopadłej do osi.

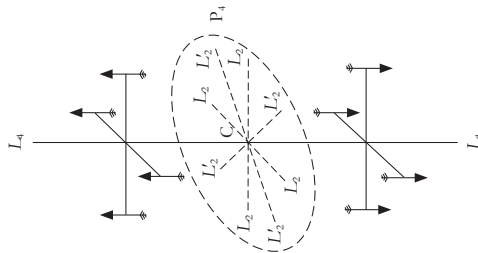
Rysunek 4 [rodzina (8) enancjomorficzna, $q = 4$] daje podgrupę symetrii skrętnej (b): jest to symetria kryształu siarczanu strychniny.

Rysunek 5 [rodzina (7), $q = 4$] daje podgrupę symetrii pola elektrycznego (c), są cztery płaszczyzny symetrii przechodzące przez oś: jest to dokładnie typ symetrii kryształu kalaminy, która jest zarówno piezoelektryczna, jak i piroelektryczna.

Rysunek 6 [rodzina (5), $q = 4$] daje podgrupę symetrii magnetycznej (d); jest to symetria kryształów szelitu i erytrytu (przyp. tłum. $\text{CO}_3(\text{AsO}_4)_2 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$).

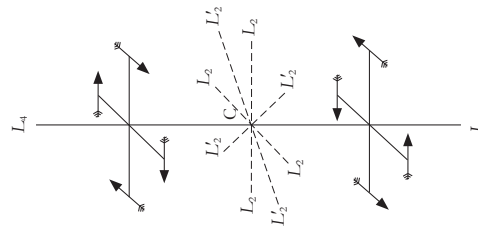
Wreszcie Rysunek 7 [rodzina (4) enancjomorficzna, $q = 4$] daje podgrupę grupy (e), o osi izotropowej (kryształ penta-erytrytu). Na Rysunku 7 strzałki na dole dotyczą dyssymetrii pola magnetycznego, strzałki na górze pola elektrycznego. Połączenie tych strzałek prowadzi do idei dyssymetrii skrętnej, ponieważ ruch obrotowy wokół osi w kierunku dolnych strzałek – jednocześnie poruszając się równoległe do osi w kierunku górnych strzałek – opisywałby spiralę.

$$\frac{2L_4}{P_4}, \frac{4L_2}{2P_2}, \frac{4L'_2}{2P'_2}, C,$$



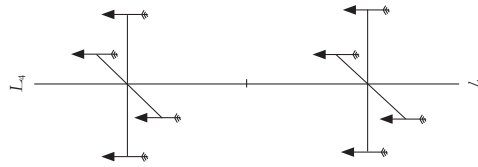
Rys. 3.

$$2L_{4,2}, 4L_2, 4L'_2,$$



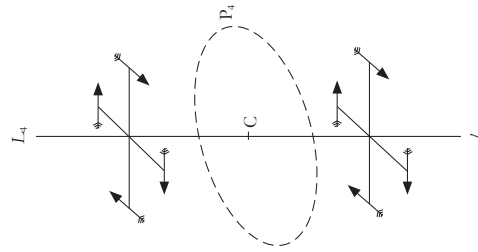
Rys. 4.

$$L_{4,4}, 2P, 2P',$$



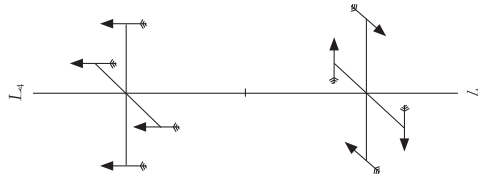
Rys. 5.

$$\frac{L_4 l_4}{P_4}, C,$$



Rys. 6.

$$L_4 l_4$$



Rys. 7.

5. Superpozycja przyczyn dyssymetrii w tym samym ośrodku

Kiedy dwa zjawiska o różnej naturze nakładają się na siebie w tym samym ośrodku, to ich dyssymetrie się sumują. Jeśli nałożymy na siebie przyczyny dyssymetrii dwóch z trzech grup (b), (c), (d), w taki sposób, że osie izotropii pokrywają się, to otrzymamy grupę (e), ponieważ oś izotropii będzie jedynym elementem symetrii wspólnym dla dwóch nałożonych grup. Lub mówiąc inaczej (e) posiada połączoną dyssymetrię tych trzech grup. Zatem, składając razem, jak zaczynamy to nazywać, przyczyny dyssymetrii dwóch spośród trzech grup (b), (c), (d), uzyskamy dyssymetrię charakterystyczną trzeciej grupy.

Zalóżmy, na przykład, że na ciało nakładamy jednocześnie *pole elektryczne* (c) i *pole magnetyczne* (d) o tym samym kierunku, wtedy zachowa się tylko oś izotropii; obecność pola elektrycznego wyklucza istnienie środka i płaszczyzny symetrii prostopadłej do osi, a obecność pola magnetycznego wymusza zniknięcie płaszczyzn symetrii zawierających oś. Zatem, symetria układu jest symetrią (e), która jest podgrupą symetrii (b): będziemy mieli w ciele dyssymetrię skrętną. Jeśli weźmiemy, na przykład, drut żelazny i namagnesujemy go wzdłuż jego długości; to przepuszczenie przez niego prądu elektrycznego, spowoduje skręcanie się drutu (eksperyment Wiedemanna).

Być może jest możliwe stworzenie ośrodka zdolnego do wykazywania polaryzacji skrętej ciał aktywnych poprzez nałożenie w ciele symetrycznym pola elektrycznego i pola magnetycznego. Przynajmniej nie byłoby to sprzeczne z warunkami symetrii. W kierunku osi mogłaby wystąpić superpozycja zjawiska magnetycznej polaryzacji rotacyjnej (tj. zmiana zwrotu wraz ze zmianą kierunku propagacji światła) i zjawiska zwykłej polaryzacji rotacyjnej. Prostopadle do osi można by uzyskać czyste zjawisko zwykłej polaryzacji rotacyjnej. Taki ośrodek z symetrią enancjomorficzną być może nadal umożliwiałby realizację pewnych dyssymetrycznych reakcji chemicznych lub oddzielanie prawych i lewych substancji w kombinacji racemicznej lub nawet osadzania z roztworu w unikalnej postaci substancji o symetrycznych molekułach, takich jak chloran sodu, który zwykle osadza się w postaci kryształów dyssymetrycznych prawych i lewych pomieszanych.

Przeciwnie, pole elektryczne lub pole magnetyczne działające pojedynczo nie może wywołać reakcji dyssymetrycznej, ponieważ te zjawiska są zgodne z istnieniem płaszczyzny symetrii.

Zalóżmy teraz, że nałożymy *dysymetrię skrętną* (b) i *dysymetrię magnetyczną* (d), ponownie otrzymamy symetrię (e), która jest podgrupą symetrii pola elektrycznego (c).

Weźmy kawałek drutu, namagnesujmy go i skręćmy. Kiedy następuje skręcanie w przewodzie, przez który przepływa prąd pojawia się siła elektromotoryczna, jeśli jest on umieszczony w obwodzie zamkniętym (eksperyment Wiedemanna).

Warunki symetrii pokazują nam, iż może się zdarzyć, że ciała z cząsteczkami dyssymetrycznymi (zdolnymi do zwykłej rotacji) zostaną spolaryzowane dielektrycznie, po umieszczeniu w polu magnetycznym.

Na koniec załóżmy, że nakładamy *dysymetrię skrętną* (b) i *pole elektryczne* (c), ponownie będziemy mieli symetrię (e), która jest podgrupą symetrii magnetycznej. Drut żelazny, przez który przepływa prąd elektryczny, magnesuje się w kierunku swojej długości, gdy się go skręca (eksperyment Wiedemanna).

Warunki symetrii pozwalają nam wyobrazić sobie, że ciało z cząsteczkami dyssymetrycznymi być może ulegnie polaryzacji magnetycznej po umieszczeniu go w polu elektrycznym.

Zjawisko Halla

Nalóżmy pole elektryczne (c) i pole magnetyczne (d) w tym samym ośrodku, ale orientując kierunek obu pól pod kątem prostym do siebie. W takiej sytuacji jedynym elementem symetrii wspólnym dla obu pól jest płaszczyzna symetrii zawierająca kierunek pola elektrycznego i prostopadła do kierunku pola magnetycznego. Będziemy zatem mieć za całą symetrię płaszczyznę P [grupa 4].

Po obu stronach płaszczyzny zjawiska będą musiały być symetryczne, ale w płaszczyźnie symetria nie wskazuje już na jakieś uwarunkowania. Rozważmy na przykład trzy osie ortogonalne i prostokątną metalową blaszkę prostopadłą do osi Ox , która przechodzi przez środek jej kształtu, a której boki są równoległe do pozostałych osi Oy i Oz . Jeśli prąd przepływa przez blaszkę wzdłuż osi z , to nie może być siły elektromotorycznej wzdłuż osi y , ponieważ płaszczyzna zOx jest płaszczyzną symetrii dla prądu i dla blaszki. Jeśli nie ma prądu, ale wzdłuż osi x prostopadłe do blaszki jest pole magnetyczne, to nie może być żadnego prądu wzdłuż osi y , ponieważ oś x jest osią dwukrotną dla pola i dla blaszki, a ponadto istnieje środek symetrii. Jeśli teraz mamy zarówno pole magnetyczne wzdłuż osi x , jak i prąd wzdłuż osi z to oś, środek,

plaszczyna symetrii znikają i nic już nie przeszkadza, z punktu widzenia symetrii, aby pojawiła się siła elektromotoryczna wzdłuż osi y .

Teoria rozchodzenia się ciepła i elektryczności w ciałach krystalicznych (Stokes, Thomson, Minnigerode, Boussinesq) pokazuje, że dla pewnych ośrodków krystalicznych należy uwzględnić tzw. współczynniki rotacji. Dotyczy to kryształów z rodziny (5) $(L_q, l_q)/P_q$ i (6) $(L_q, l_q)/\pi_q$ oraz ich podgrup (1), (2), (3), (4). Kryształy te mają, co najwyżej, jedną oś rzędu q normalną do płaszczyzny symetrii prostej lub symetrii alternatywnej rzędu q , gdzie q jest dowolną liczbą całkowitą. Ciało spolaryzowane magnetycznie ma symetrię (d) $(L_\infty, l_\infty)/P_\infty$, która jest granicznym przypadkiem grup (5) i (6) dla $q = \infty$. Wszystkie kryształy, które zgodnie z teorią mogą mieć współczynniki rotacji, mają jako typ symetrii jedną z podgrup symetrii magnetycznej.

Teoria zbudowana dla ciał krystalicznych znakomicie stosuje się do symetrii magnetycznej, a istnienie współczynników rotacyjnych wyjaśnia wszystkie osobliwości zjawiska Halla, bez konieczności wprowadzania do teorii przewodnictwa czegokolwiek innego niż symetria pola.

Jeśli elektryczność ma dopłynąć do środka dysku metalowego umieszczonego prostopadle do pola magnetycznego i jeśli ta elektryczność jest zbierana równomiernie na krawędziach dysku, to linie opisane przez strumień elektryczny muszą być spiralami (Boltzmann)⁹.

Zjawiska piroelektryczne i piezoelektryczne

Kryształy piroelektryczne z konieczności mają symetrię podgrupy pola elektrycznego, ponieważ nagrzewanie z założenia równomierne nie wprowadza samo z siebie żadnej dyssymetrii. Kryształy piezoelektryczne są liczniejsze niż kryształy piroelektryczne. Obejmują one

⁹ Bardzo ciekawe jest to, że kryształy, dla których stworzono teorię Stokesa okazały się ogniotrwale, zaś C. Soret bez powodzenia badał wpływ współczynników rotacji w gipsie na przewodność cieplną. Zjawisko Halla zaobserwowano tylko w przypadku metali, a gips jest dielektrykiem. Współczynniki rotacji byłyby być może odczuwalne przy użyciu skryształizowanego ciała metalicznego wykazującego niezbędną dyssymetrię; ale nie sądzę, żebyśmy posiadali obecnie odpowiednią substancję do przeprowadzenia eksperymentu.

Teoria przewodnictwa cieplnego w kryształach jest przedstawiona w najnowszym artykule C. Soreta (Soret 1893, ss. 241–259). Lord Kelvin był pierwszym, który zauważył, że zjawisko Halla dostarczyło dowodu na istnienie współczynników rotacyjnych (Thomson 1882).

w istocie wszystkie te piroelektryczne, a ponadto zawierają kryształy, które pod wpływem obciążenia mechanicznego przyjmują jedynie symetrię mniejszą niż symetria pola elektrycznego. Na przykład, blenda (kryształ czworościenny) i kwarc mają symetrie, które nie są podgrupami pola elektrycznego. Kwarc ma symetrię $2L_3, 3(L_2 L'_2)$, podwójną trójrotną oś główną i trzy osie dwukrotne, niepodwójne prostopadłe do tej osi. Na przykład, przez ściskanie wzdłuż osi dwukrotnej dodawana jest dyssymetria cylindryczna (a) do tej kwarcu; wszystko to, co pozostaje, jako elementy symetrii to $(L_2 L'_2)$, oś dwukrotna niepodwójna, która może stać się kierunkiem polaryzacji elektrycznej.

Można również wykazać w ten sam sposób, że poprzez ściskanie w kierunku prostopadłym zarówno do osi dwukrotnej, jak i do osi trójrotnej, będzie powstawać polaryzacja wzdłuż osi dwukrotnej i że współczynniki, które wpływają na charakterystyki tych dwóch trybów generowania polaryzacji są równe i mają przeciwne znaki. Możemy więc przewidzieć pewne cechy szczególne tego zjawiska; lecz te warunki symetrii nie są jedynymi, które występują w ogólnej teorii¹⁰.

6. Związki pomiędzy charakterystycznymi symetrami różnych ośrodków

Przypuszczaliśmy, że materiał nieskrystalizowany i nieobdarzony siłą rotacyjną nie wprowadza sam z siebie do układu jakiejkolwiek dyssymetrii; przyjęliśmy domyślnie to samo założenie dla ośrodka, który wypełnia puste przestrzenie materiału. To całkiem naturalne, lecz całkowicie heurystyczne założenie jest niezbędne; pokazuje ono dobrze, że nie możemy uzyskać pojęcia absolutnej symetrii, musimy arbitralnie wybrać symetrię dla określonego ośrodka i wydedukować symetrię innych ośrodków. Co więcej, ta względna symetria jest jedyną, która nas interesuje. Jeśli na przykład cały układ porusza się z określoną prędkością i rozważamy w nim pewne ciało A , to w ogólności przyda nam się znajomość symetrii ciała A względem układu, bez uwzględniania wspólnej dyssymetrii powstającej na skutek ruchu całego układu.

Zalóżmy, że w elektryczności znamy tylko ogólne zjawiska elektryczności statycznej, elektryczności dynamicznej, magnetyzmu,

¹⁰ Kompletną ogólną teorię piezoelektrycznych właściwości kryształów opracował W. Voigt (Voigt 1890; Riecke, Voigt 1892).

elektromagnetyzmu i indukcji, wtedy nic nie powie nam dokładnie, jaki rodzaj symetrii należy przypisać polu elektrycznemu i polu magnetycznemu. Moglibyśmy na przykład wybrać dla pola magnetycznego symetrię (c) (którą przypisaliśmy powyżej polu elektrycznemu) i rozumując tak, jak to zrobiliśmy, musielibyśmy koniecznie przyjąć za symetrię pola elektrycznego grupę (d) (którą przypisaliśmy powyżej polu magnetycznemu). W takim układzie nie byłoby żadnego absurdu ani sprzeczności z naszą wyjściową hipotezą o całkowitej symetrii materii.

Ogólne zjawiska elektryczności i magnetyzmu wskazują nam zatem tylko związek między symetriami pola elektrycznego i pola magnetycznego tak, że jeśli przyjmiemy (c) dla symetrii jednego, to musimy przyjąć (d) dla symetrii drugiego i odwrotnie. Aby usunąć tę nieokreśloność, konieczne jest wprowadzenie innych zjawisk, zjawisk elektrochemicznych lub elektryczności kontaktowej, zjawisk piro- lub piezoelektrycznych, a nawet zjawiska Halla lub magnetycznej polaryzacji rotacyjnej.

Wymiary wielkości elektrycznych i magnetycznych dają przykład nieokreśloności całkiem porównywalnej z tą, którą przed chwilą przytoczyliśmy dla *symetrii* ośrodków elektrycznych i magnetycznych. Ogólne zjawiska elektryczności i magnetyzmu podobnie nie są w stanie usunąć tej nieokreśloności; aby ją zlikwidować, należałoby wziąć pod uwagę inne zjawiska, np. zjawiska elektrochemiczne¹¹.

7. Uwagi końcowe

Symetrie charakterystyczne zjawisk są niezaprzeczalnie przedmiotem ogólnego zainteresowania. Z punktu widzenia zastosowań widzimy, że wnioski, jakie możemy wyciągnąć z rozważań dotyczących symetrii, są dwojakiego rodzaju.

Pierwsze są pewnymi negatywnymi konkluzjami, stanowią one odpowiedź na bezsprzecznie prawdziwe stwierdzenie: *Nie ma skutku bez przyczyn*. Skutki to zjawiska, które zawsze wymagają pewnej dyssymetrii, aby mogły wystąpić. Jeśli ta dyssymetria nie istnieje, to zjawisko jest niemożliwe. To często powstrzymuje nas przed bląkaniem się w poszukiwaniu zjawisk niemożliwych do zrealizowania.

Rozważania na temat symetrii wciąż pozwalają nam na sformułowanie drugiego rodzaju wniosków, tych o charakterze pozytywnym, ale

¹¹ Próbę w tym kierunku podjął już M. Abraham (Abraham 1893).

które nie dają takiej samej pewności, jak te o charakterze negatywnym. Odpowiadają one stwierdzeniu: *Nie ma przyczyny bez skutków*. Skutki to zjawiska, które mogą zaistnieć w ośrodku wykazującym pewną dyssymetrię; mamy tutaj cenne wskazówki do odkrywania nowych zjawisk, ale przewidywania te nie są dokładnymi przewidywaniami, takimi jak te z termodynamiki. Nie mamy pojęcia o rzędzie wielkości przewidywanych zjawisk; mamy również tylko niedoskonale wyobrażenie o ich dokładnej naturze. Ta ostatnia uwaga pokazuje, że musimy wystrzegać się wyciągania kategorycznych wniosków z negatywnego doświadczenia.

Rozważmy na przykład kryształ turmalinu, który ma symetrię będącą podgrupą symetrii pola elektrycznego. Dochodzimy do wniosku, że kryształ taki może być spolaryzowany elektrycznie. Umieścimy kryształ w polu elektrycznym z osią zorientowaną pod kątem 90° do pola. Polaryzacja w żaden sposób się nie objawia, nie ma dostrzegalnego momentu obrotowego działającego na kryształ i można by sądzić, że kryształ nie jest spolaryzowany lub jeśli polaryzacja istnieje, to jest mniejsza niż ta, którą można by pomierzyć. Jednak polaryzacja istnieje i aby się pojawiła należy zmodyfikować eksperyment, np. poprzez równomierne ogrzewanie kryształu, co niczego nie zmienia w jego symetrii.

Bibliografia

- Abraham, M.H. 1893: Sur le dimensions de la température absolue. *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences (Sprawozdania z posiedzeń Akademii Nauk)* CXVI, ss. 1123–1124. URL: <https://www.biodiversitylibrary.org/item/23725#page/375/mode/1up> (dostęp: marzec 2023).
- Bravais, August 1866: Études cristallographiques (*Badania krystalograficzne*). Paris, 1866. URL: <https://archive.org/details/tudescristallog00bravgoog/page/n9/mode/2up> (dostęp: marzec 2023).¹²
- Curie, Pierre 1884: Sur les questions d'ordre (O problemie porządku). *Bulletin de la Société française de minéralogie* 7(3–4), ss. 89–111. URL: https://www.persee.fr/docAsPDF/bulmi_0150-9640_1884_num_7_3_2342.pdf.

¹² Przyp. tłum.: W oryginale P. Curie powołuje się na pracę A. Bravais dwukrotnie, za pierwszym razem bez podania konkretnych danych, za drugim podając błędnie jej tytuł. Kwerenda literaturowa pozwoliła zidentyfikować referowaną pracę.

Pierre Curie (autor), Andrzej Ziółkowski (autor przekładu i komenatrza)
O symetrii zjawisk fizycznych, symetrii pola elektrycznego i pola magnetycznego

- Curie, Pierre 1884: Sur la symétrie (O symetrii). *Bulletin de la Société française de minéralogie* 7(8–9), ss. 418–457. URL: https://www.persee.fr/doc/AsPDF/bulmi_0150-9640_1884_num_7_8_1888.pdf (dostęp: marzec 2023).
- Curie, Pierre 1893: *À propos des Éléments de Cristallographie physique de M. Ch. Soret. Notes bibliographiques et remarques sur la cristallographie. Archives des sciences physiques et naturelles.* 29(3), ss. 337–354. URL: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k299099j/f344.item> (dostęp: marzec 2023).
- Fedorow, Jewgraf Stiepanowicz 1891: Simmetrija pravil'nykh sistem figur (Symetria regularnych układów figur). *Zapiski Imperatorskogo Sant-Petersburgskogo Mineralogicheskogo Obshchestva* 28, ss. 1–146.¹³
- Fedorow, E. [Jewgraf Stiepanowicz] 1892: Zusammenstellung der krystallographischen Resultate des Herrn Schoenflies und der meinigen. *Zeitschrift für Krystallographie und Mineralogie* 20, ss. 25–75. DOI: [10.1524/zkri.1892.20.1.25](https://doi.org/10.1524/zkri.1892.20.1.25).
- Jordan, Camille 1868a: Mémoire sur les groupes de mouvements (Rozprawa o grupach ruchów). *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 2(1), ss. 167–215. DOI: [10.1007/BF02419610](https://doi.org/10.1007/BF02419610).
- Jordan, Camille 1868b: Mémoire sur les groupes de mouvements. *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 2(1), ss. 322–345. DOI: [10.1007/BF02419622](https://doi.org/10.1007/BF02419622). [Przyp. red.: P. Curie podał błędnie datę 1869].
- Liebisch, Theodor 1891: *Physikalische Krystallographie (Krystalografia fizyczna)*. Leipzig: Verlag von Veit.¹⁴
- Mallard, (François) Ernest 1879, 1884: *Traité de cristallographie géométrique et physique (Traktat o krystalografii geometrycznej i fizycznej)*, tom 1, Paryż 1879 (Krystalografia geometryczna, teoria sieci, i morfologia). URL: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k9633225j/f9.item.texteImage> (dostęp: marzec 2023); tom 2, Paryż, 1884 (Krystalografia fizyczna). URL: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k96306628/f9.item.texteImage> (dostęp: marzec 2023).¹⁵
- Riecke, Eduard, Voigt, Woldemar 1892: Die Piezoelectrischen Constanten des Quarzes und Turmalines (Stałe piezoelektryczne kwarcu i turmalinu). *Annalen der Physik und Chemie* XLV, ss. 523–552.

¹³ Przyp. tłum.: W pracy tej Fedorow jako pierwszy wyprowadził 230 grup przestrzennych (krystalograficznych) symetrii, służących obecnie jako matematyczna podstawa analizy strukturalnej; patrz także Bibliografia do Komentarza tłumacza: Scholz 1989, ss. 114–148; Pauffer, Filatov 2020.

¹⁴ Przyp. tłum.: P. Curie nie podał konkretnych danych referowanej pracy, prawdopodobnie chodzi o wskazaną publikację.

¹⁵ *Ibidem*.

URL: https://archive.org/details/sim_annalen-der-physik_1892_45_3/page/522/mode/2up (dostęp: marzec 2023).

Schœnflies, Arthur 1891: *Krystallsysteme und Krystallstruktur (Układy krystaliczne i struktura krystaliczna)*. Leipzig.

URL: <https://archive.org/details/krystallsysteme00schogoog> (dostęp: marzec 2023).

Soret, Charles 1893: *Éléments de cristallographie physique (Elementy Krystalografii Fizycznej)*, Paris.

URL: https://books.google.pl/books?id=FMdKa_CkqFkC&printsec=frontcover&hl=pl&source=gbs_ViewAPI&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false (dostęp: marzec 2023).¹⁶

Soret, Charles 1893: De la conductibilité calorifique dans les cristaux (Przewodnictwo cieplne w kryształach). *Journal de Physique*, t. II, 2^e serie, ss. 241–259.17

Thomson, William 1882: *Mathematical and Physical Papers*, t. I, s. 281.

URL: <https://archive.org/details/mathematicaland01kelvgoog/page/280/mode/2up> (dostęp: marzec 2023).

Voigt, Woldemar 1890: Allgemeine Theorie der piezo- und pyroelectrischen Erscheinungen an Krystallen (Ogólna teoria zjawisk piezoelektrycznych i piroelektrycznych w kryształach), *Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Vol. 36, Göttingen, ss. 1–99. URL: https://www.zobodat.at/pdf/Abh-koeng-Gesellsch-Wiss-Goettingen_36_0001-0099.pdf (dostęp: marzec 2023).

¹⁶ *Ibidem*.

¹⁷ Przyp. tłumacza: W oryginale występuje omyłkowo inicjał imienia M. Soret. Z kontekstu i kwerendy literaturowej wynika jednak, że chodzi o pracę Charlesa Soreta, w związku z tym w tłumaczeniu zmieniono inicjał na C. Soret.

Komentarz do polskiego tłumaczenia

Andrzej Ziółkowski

1. Przypisy do głównego tekstu

P1. Zarysowana w kilku akapitach poniżej przez Piotra Curie *definicja symetrii* nie jest ani klarowna, ani precyzyjna. Można ją chyba najlepiej określić jako intuicyjną. Nawiązuje ona z jednej strony do klasycznej ograniczonej do obiektów geometrycznych (figur, brył) definicji symetrii, mającej swe źródło w antycznej Grecji. Z drugiej strony Piotr Curie twórczo przeciera tutaj szlak do współczesnego bardzo ogólnego rozumienia pojęcia symetrii jako własności o uniwersalnym charakterze i wszechstronnym zastosowaniu. Pracę zapoczątkowaną przez Piotra Curie ukończył z sukcesem niemiecki matematyk Hermann Weyl, który jako pierwszy sformułował współcześnie akceptowaną definicję pojęcia symetrii jako pewnej uniwersalnej kategorii filozoficznej charakteryzującej strukturę organizacji wszelakich systemów istniejących we wszechświecie (Weyl 1952, s. 3):

[...] Rozpoczynając od nieco niejasnego pojęcia symetrii = harmonii proporcji, w tych czterech wykładach stopniowo rozwijane jest najpierw geometryczne pojęcie symetrii ... by ostatecznie dojść do ogólnej idei leżącej u podstaw wszystkich tych specjalnych układów, a mianowicie niezmienniczości konfiguracji elementów na skutek działania pewnej grupy przekształceń automorficznych [...] (tłumaczenie A.Z.).

Według Weyla kwintesencją symetrii jest własność polegająca na niezmienniczości obiektu (dowolnego rodzaju) przy poddawaniu go pewnemu zbiorowi (grupie) automorficznych przekształceń.

Ogólną, bardzo pojemną *współczesną definicję symetrii* autor niniejszego Komentarza sformułowałby następująco:

Definicja Symetrii

Symetria to *niezmienniczość* (stateczność, trwałość, stałość, izotropia) jakiejś *cechy* (geometrycznej, fizycznej, biologicznej, informacyjnej, itp.) *obiektu* (obiektem może być układ geometryczny, przedmiot materialny, zjawisko

przyrodnicze, prawo fizyczne, relacja społeczna, proces przebiegający w czasie, pole fizyczne etc.) po poddaniu go *działaniu przekształceń z pewnego zbioru* (przekształceniami mogą być przesunięcia, odbicia lustrzane, obroty, zmiany porządku etc.) względem, których rozpatruje się symetrię.

Jak stąd wynika istnieje nieskończenie wiele różnych *typów symetrii*, zależących od kategorii analizowanych obiektów, typu rozpatrywanych cech tych obiektów oraz zależących od rodzajów transformacji, którym te obiekty są poddawane. Dany obiekt ze względu na jakąś swoją cechę może być jednocześnie symetryczny z uwagi na jeden rodzaj transformacji i dyssymetryczny ze względu na inny rodzaj transformacji. Ten sam obiekt ze względu na inną swoją cechę może jednak być symetryczny względem obu poprzednio rozpatrywanych rodzajów transformacji. Cecha symetrii stanowi więc bardzo pojemne i bogate pojęcie.

Z precyzyjną matematyczną definicją symetrii można zapoznać się w Dodatku B zatytułowanym „Symetria”, znajdującym się w książce Jana Rychlewskiego *Wymiary i podobieństwo* (Rychlewski 1991b, ss. 171–184). W zwięzły sposób podano w nim zarys ogólnego, *formalnego języka symetrii* (ilościowego modelu symetrii) mającego zastosowanie do badania dowolnej sytuacji, w której występuje pojęcie symetrii. Kluczowe elementy aparatu matematycznego *algebraicznej teorii symetrii* stanowią zdefiniowane w Dodatku B i omówione na przykładach pojęcia: Γ -zbiorów, orbit, znaczników orbit, niezmienników i funkcji niezmienniczych. Algebraiczna teoria symetrii stanowi wszechstronne narzędzie umożliwiające analizę wszelakich typów symetrii. W Dodatku B w zwięzły sposób podano ważne wyniki teorii symetrii, takie jak: *zasada ornamentu* (wyrażająca najprościej, najgłębszą właściwość złożonych obiektów symetrycznych), twierdzenie reprezentacyjne dla obiektów symetrycznych, twierdzenie *o symetrii przyczyn i skutków praw fizycznych*, twierdzenie o niezmienniczym rozszerzeniu dowolnej funkcji.

Pełna matematyczna teoria symetrii została rozwinięta w książce Jana Rychlewskiego *Symetria przyczyn i skutków* (Rychlewski 1991a), dla której Dodatek B stanowi bardzo zwarte streszczenie i motywację.

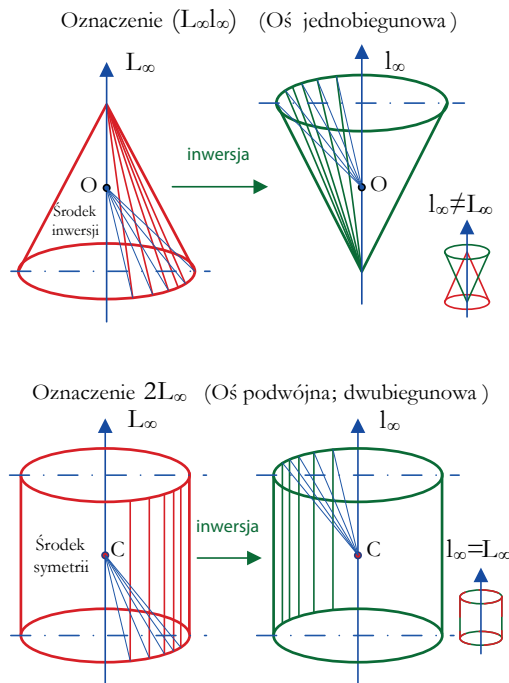
Ścisła matematycznie współczesna definicja symetrii materiałowych wraz z definicjami niezbędnych do tego celu pojęć została przypomniana w sekcji Uwag końcowych niniejszego Suplementu.

P2. W świetle współczesnej definicji symetrii można się domyślić, że przez *operacje odzyskiwania* autor ma na myśli, co do istoty, operacje pozostawiające dany układ (obiekt) niezmienny, a które we współczesnej nomenklaturze nazywane są *operacjami symetrii*. Jednak autor w całej pracy używa pojęcia operacji odzyskiwania w szerszym znaczeniu, a mianowicie, jako pewien zbiór operacji szczególnego rodzaju (np. obroty, albo odbicia lustrzane, etc.), oraz jako podzbiory tych operacji, które nie prowadzą do zmiany (kształtu) danego obiektu (np. obroty o 90°), czyli faktyczne operacje symetrii. Z tego powodu zdecydowano się na wykorzystanie dosłownego tłumaczenia oryginalnego sformułowania, tj. „operacje odzyskiwania”, wierząc, że nie będzie to prowadzić do nieporozumień.

P3. Z dalszego kontekstu można się domyślić, że przez przemieszczenie autor rozumie tutaj nie tylko klasyczne przemieszczenie *liniowe*, ale również przemieszczenie *kątowe*, czyli obroty. Zatem przez operację *odzyskiwania (symetrii) pierwszego rodzaju* autor rozumie operację *translacji lub obrotu*. Również z kontekstu można domyślić się, że przez operację *odzyskiwania drugiego rodzaju* autor rozumie operację *odbicia lustrzanego*. Określenie przez autora odbicia lustrzanego jako „...*transformacji symetrycznej we właściwym sensie...*” w świetle współczesnej definicji symetrii jest nietrafne.

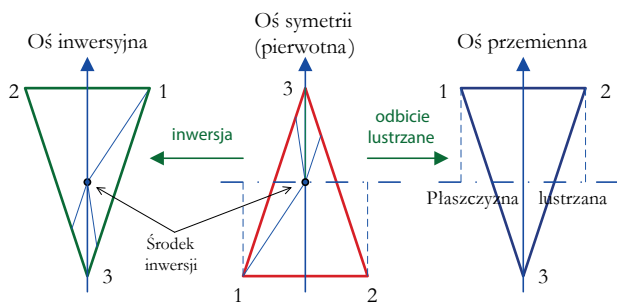
Warto zwrócić uwagę, że trudności, jakie może mieć czytelnik z poprawnym zrozumieniem o jakie symetrie chodzi autorowi pracy wynikają, jak się wydaje, z pewnego błędu metodologicznego, jaki jest często popełniany również współcześnie przy definiowaniu różnych rodzajów symetrii. A mianowicie zamiast mówić o transformacjach *obiektu*, którego symetria jest badana przy poddawaniu go specyficznemu rodzajowi (grupie) transformacji, mówi się o transformacjach *elementu symetrii*, względem którego badana jest symetria obiektu (np. o osi inwersyjnej, osi przemiennej, odbiciu lustrzanym triady osi współrzędnych, etc.). Wskazówki, jak uzyskiwać precyzję i klarowność w określaniu, o jaką symetrię chodzi, dostarcza poprawna merytorycznie współczesna definicja symetrii. Postępując zgodnie z nią, należy mówić o inwersji, odbiciu lustrzanym, skręcaniu, czy też zmianie porządku w obiekcie, którego symetria jest badana, nie zaś o inwersji, odbiciu lustrzanym etc. elementu symetrii, względem którego dana operacja transformacji, prowadząca do symetrii, jest wykonywana. Nawet, jeśli te ostatnie sformułowania byłyby „prostsze” ze względu na np. mniejszą liczbę słów.

P4. Standardowo wyobrażamy sobie obrotową oś symetrii, jako prostą (odcinek), wokół której dokonywany jest obrót. Jednak występują sytuacje (kształty) takie, że istotna jest orientacja figury typu góra-dół względem osi obrotu. Typowy przykład to np. piramida o podstawie wieloboku, wspomniana przez Piotra Curie. Jeżeli czubek piramidy jest skierowany do góry i piramida będzie obracana wokół swojej osi, to przy pewnych kątach jej kształty będą się nakładać. Podobnie, jeżeli czubek piramidy jest skierowany do dołu i piramida będzie obracana, to przy pewnych kątach obrotu jej kształty będą się nakładać. Jednakże, przy jakimkolwiek obrocie piramidy wokół jej osi piramida z czubkiem w górę nie nałoży się na kształt piramidy z czubkiem w dół. Aby móc odróżnić i opisać tego rodzaju sytuacje, wprowadzone zostało pojęcie *osi biegunowych*, tj. takich osi, których zwrot względem figury badanej pod względem symetrii jest istotny. O tego typu osiach Piotr Curie pisze, że są one „*innego rodzaju*”, mimo że dotyczą de facto tej samej osi, i tego samego rodzaju transformacji np. obrotów. Różnicę pomiędzy osiami L_q i l_q zilustrowano na Rysunku S1.



Rys. S1. Ilustracja graficzna różnicy pomiędzy osiami symetrii L_q i l_q .

W krystalografii również współcześnie wykorzystywanych jest wiele koncepcji różnorodnych „rodzajów” osi symetrii, np. oś inwersyjna, oś przemienna, oś rotacyjno-inwersyjna etc. Różnicę pomiędzy dwoma pierwszymi zilustrowano na Rysunku S2.



Wszystkie pokazane osie to osie biegunowe (polarne)

Rys. S2. Ilustracja zasad konstruowania osi inwersyjnej i przemiennnej w stosunku do (pierwotnej) osi symetrii.

P5. W całym tekście często używane są dwie nazwy rodzajów osi symetrii; są to oś *dwukrotna* (*axe binaires*) i oś *podwójna* (*axe double*), które łatwo można pomylić.

Dwukrotna oś symetrii to taka oś, że przy obrocie obiektu *wokół* niej o kąt 180° pierwotny kształt obiektu i jego kształt obrócony pokrywają się (kształt obiektu jest niezmienniczy). *Podwójna oś symetrii* to taka oś, że przy obrocie obiektu *względem* niej do góry nogami – o kąt 180° pierwotny kształt obiektu i jego kształt obrócony pokrywają się, por. również Rysunek S1. Zatem, z osiami dwukrotną i podwójną związane są zupełnie różne zbiory operacji odzyskiwania (symetrii). Często w literaturze spotyka się określenie, że przy zmianie zwrotu osi obiekt pozostaje niezmienniczy. Jest to określenie, co do zasady niepoprawne, choć pogładowe, bo to badaną pod względem symetrii figurę poddaje się przekształceniom po to, by zbadać czy jest ona symetryczna przy poddawaniu jej określonego rodzaju transformacji.

Warto także zwrócić uwagę, że występujące często w dalszym tekście określenie „*powtarzalność*” oznacza operację obrotu *wokół* pewnej osi symetrii.

P6. Jedną z podstawowych informacji wykorzystywanych w krystalografii jest powszechnie zaakceptowana Tabela 32 *klas krystalograficznych*, zawierająca listę wszystkich możliwych *punktowych grup symetrii* kryształów (tj. symetrii względem takich *elementów symetrii* jak środek symetrii,

plaszczyna symetrii, oś symetrii). Uwzględnianymi *transformacjami* są trójwymiarowe obroty, inwersje i odbicia lustrzane, przy czym zgodnie z *twierdzeniem o ograniczeniach krystalograficznych*, kryształy mogą wykazywać tylko 2, 3, 4 i 6-krotne osie symetrii. Klasy krystalograficzne podzielono na siedem *układów krystalograficznych* przyjmując jako podstawę podziału zbiory *grup symetrii* mających jeden lub więcej wspólnych elementów symetrii. Naturalnie nie jest to jedyna możliwa klasyfikacja i podział. Zawarta w pracy Piotra Curie Tabela 1. stanowi podział pewnego zbioru obiektów, analogiczny do opisanego powyżej standardowego podziału kryształów, na *klasy* i *rodziny* ze względu na *elementy symetrii* i *grupy symetrii* tych obiektów. Jednak, rozważany przez niego zbiór obiektów jest jakościowo szerszy od kryształów (zawiera pola fizyczne), szerszy jest rozpatrywany zbiór elementów symetrii, jak również jakościowo szerszy jest zbiór transformacji symetryzacyjnych.

Poprzez analogię standardowemu *układowi krystalograficznemu* odpowiada *klasa krystalograficzna Curie*, zaś standardowej *klasie krystalograficznej* odpowiada *rodzina Curie*.

Klasyfikacja Tabela 32 klas krystalograficznych dotyczy *statycznych* układów geometrycznych i *dyskretnych* operacji transformacyjnych, które doprowadzają do niezmienniczości, czyli względem których układy są symetryczne (statyczne kształty krystalograficzne odzyskuje się poprzez dyskretną wartość kąta obrotu wokół osi symetrii etc.). Tabela 1. obejmuje układy geometryczne poruszające się – *kinematyczne*, np. wirujące, jak to ma miejsce w przypadku pola magnetycznego czy kuli wypełnionej płynem z wirami. Piotr Curie w Tabeli 1. uwzględnia *ciągłe transformacje*, które mogą prowadzić do symetrii (niezmienniczości) obiektów (obrót o dowolny kąt, nawet niekończenie mały, odzyskuje kształt). Ciągłe transformacje symetryzacyjne prowadzą do pojęcia *granicznych grup symetrii*. Heurystyczne podejście i niestandardowe elementy zawarte w Tabeli 1. okazały się twórczo i poznawczo inspirujące i zapoczątkowały proces uogólniania pojęcia symetrii, co doprowadziło do zrozumienia najgłębszej jej istoty i wypracowania współczesnej *definicji symetrii* sformułowanej pół wieku później przez Hermanna Weyla.

Dla łatwiejszego zorientowania się, jakie są relacje pomiędzy standardowymi układami krystalograficznymi i klasami symetrii wyróżnionymi przez Piotra Curie, do oryginalnej Tabeli 1. została dodana przez tłumacza dodatkowa kolumna, w której podano oznaczenia międzynarodowe rodzin, tj. według klasyfikacji Hermanna–Mauguina (H-M). W ustaleniu

tych oznaczeń bardzo pomocne były Tabela 3.2.1.3 (47 kształtów krystalograficznych form ściennych i punktowych, ich nazwy, symetrie własne i ich występowanie w krystalograficznych grupach punktowych (generowanie grup punktowych), Rysunek 3.2.1.1 (47 kształtów krystalograficznych, które kryształy mogą przyjmować) i Tabela 3.2.1.4 (Nazwy i symbole 32 klas krystalograficznych) podane w pracy Hahna *et al.* (Hahn 2016).

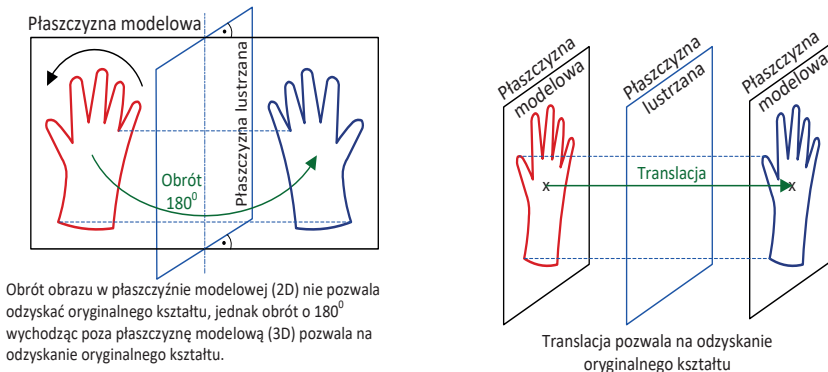
P7. Figury *enantjomorficzne* – od greckiego słowa *enatios* naprzeciwko. Dwa obiekty, m.in. figury i/lub bryły geometryczne, są enantjomorficzne, gdy stanowią wzajemnie dla siebie odbicie lustrzane (powstają przez odbicie lustrzane). Jak z tej definicji wynika mogą być tylko dwa obiekty (figury) wzajemnie enantjomorficzne. Z definicji powyższej wynika również, że wszystkie obiekty enantjomorficzne to obiekty przystające (mają tę samą wielkość i kształt).

Cecha enantjomorfizmu określa sposób powstawania, a przez to wzajemnej relacji dwóch obiektów enantjomorficznych, natomiast nie określa czy i w jaki sposób są one symetryczne. Figury enantjomorficzne mogą być symetryczne ze względu na jakiś zbiór transformacji innych niż odbicie lustrzane lub nie. Cecha enantjomorfizmu nie charakteryzuje (nic nie mówi o tym) czy dwie płaskie figury enantjomorficzne to figura prawa i lewa lub czy trójwymiarowe obiekty enantjomorficzne to obiekty prawo i lewoskrętne (jak triada ortogonalna). Stwierdzenie czy obiekty enantjomorficzne są symetryczne (są nakładalne na siebie) ze względu na transformacje obrotu wymaga dalszego badania. W krystalografii lub mineralogii dwa układy krystalograficzne mogą być symetryczne ze względu na zbiór obrotów w przestrzeni trójwymiarowej lub nie. Aby zaznaczyć, że jakieś enantjomorficzne układy krystalograficzne nie są symetryczne ze względu na obroty (nie są nakładalne na siebie ze względu na jakiś zbiór/klasę obrotów) często na rysunkach takich układów umieszcza się fasetki ilustrujące rodzaj dyssymetrii.

Obiekty *enantjomorficzne* dyssymetryczne (nienakładalne na siebie poprzez obroty) nazywane są obiektami *chiralnymi* – od greckiego słowa *cheir* ręka). Pojęcie to zostało zaproponowane przez Kelvina w 1894 roku następująco (tłumaczenie własne):

„...Nazywam każdą figurę geometryczną lub grupę punktów „chiralną” i mówię, że ma ona chiralność, jeśli jej obrazu w zwierciadle płaskim, idealnie urzeczywistnionego, nie można doprowadzić do zgodności z oryginałem. ...”, (Lord Kelvin 1984).

Badanie różnego typu obiektów chiralnych stanowi obecnie przedmiot bardzo żywego zainteresowania naukowego, np. w chemii farmakologicznej, gdyż cząsteczki chiralne przy tym samym składzie chemicznym mogą wykazywać radykalnie odmienne działanie na organizm ludzki w zależności od ich skrętności (trójwymiarowej konfiguracji budowy wewnętrznej). Współczesna definicja symetrii wskazuje, że należy być ostrożnym przy kwalifikowaniu obiektów jako chiralne. Na przykład płaskie modele „ręki” lewy i prawy uzyskane poprzez odbicie lustrzane względem płaszczyzny lustrzanej ustawionej prostopadle do płaszczyzny modelowej są *chiralne ze względu na obroty dwuwymiarowe* ograniczone do płaszczyzny modelowej, w której te modele leżą. Gdyż obracając je tylko w płaszczyźnie modelowej (obroty dwuwymiarowe), nie można ich na siebie nałożyć. Jednakże modele te *nie są chiralne ze względu na trójwymiarowe obroty*, np. przekształcenie modelu „lewego” poprzez jego obrót o 180° wychodząc poza płaszczyznę modelową pozwala na nałożenie tego modelu na model „prawy”, a więc modele są wtedy nakładalne na siebie, por. Rysunek S3.



Rys. S3. Ilustracja niejednoznaczności definicji chiralności obiektu poprzez możliwość doprowadzenia do zgodności z oryginałem jego odbicia lustrzanego (definicja Kelvina), w przypadku obiektów dwuwymiarowych. W zależności od wzajemnego ustawienia płaszczyzny lustrzanej i klasy dopuszczonych transformacji odzyskiwania ten sam obiekt może być uznany za chiralny lub nie.

Istotna jest też wzajemna orientacja płaszczyzny odbicia lustrzanego i płaszczyzny modelowej. Gdy płaszczyzna odbicia lustrzanego jest równoległa do płaszczyzny modelowej, to płaski model ręki i jego odbicie lustrzane można doprowadzić do nałożenia na siebie poprzez

zwykłą translację, a więc zgodnie z definicją Kelvina takie obiekty nie są chiralne.

Rozważmy jeszcze układ współrzędnych w przestrzeni trójwymiarowej (triadę wersorów). Jeżeli wersory triady są nieodróżnialne np. wszystkie w kolorze czarnym, to osoba, która nie będzie widziała, w jaki sposób dwie triady powstawały, nie będzie w stanie stwierdzić ich skrętności, a zatem stwierdzić czy są, czy nie są chiralne. Jest tak dlatego, że dwie triady ortogonalne zawsze można na siebie nałożyć poprzez obrót trójwymiarowy. Jeżeli jednak poszczególne wersory będą odróżnialne, na przykład z powodu różnych kolorów, to będzie można stwierdzić czy są one chiralne (jeden prawoskrętny, a drugi lewoskrętny), gdyż albo można będzie nałożyć je na siebie za pomocą obrotów trójwymiarowych tak, by zgadzały się i położenia geometryczne i kolory poszczególnych wersorów (para niechiralna) albo nie (para chiralna).

Z powyżej rozpatrzonych przykładów wynika, że najgłębszą istotą chiralności nie są cechy geometryczne podane, jako jej definicyjny wyróżnik przez Kelvina, lecz pewne permutacyjne *cechy (uporządkowania) budowy wewnętrznej* pary enancjomorficznej. Wydaje się naturalnym rozszerzenie pojęcia chiralności tak, by obejmowało dyssymetrię uporządkowania dowolnych dwóch układów zbudowanych z tych samych elementów składowych. Weźmy na przykład izomery cząsteczki, która ma cztery różne rodzaje ligandów. Będziemy mieli cztery silnia (4!) możliwych porządków struktury budowy wewnętrznej takiej cząsteczki. Ogólnie dwa izomery o określonym porządku budowy – z uwagi na jakąś własność, mogą być dyssymetryczne lub symetryczne po pewnej parze indeksów charakteryzujących strukturę wewnętrzną, a zatem wykazywać chiralność lub nie. Podobna sytuacja występuje w przypadku istnienia symetrii wewnętrznych (po jakiejś parze indeksów) składowych tensora czwartego rzędu. Wyższym stopniem chiralności może być np. *dysymetria po parze indeksów* określających strukturę budowy wewnętrznej. Obserwacja powyższa dostarcza wskazówki, w jaki sposób można wprowadzić racjonalną kategoryzację i nazewnictwo obiektów chiralnych przy wykorzystaniu pojęcia symetrii wewnętrznej (permutacyjnej) tensorów.

Własność chiralności i związane z nią przeróżne efekty fizyko-chemiczne stanowi spektakularny doświadczalny dowód sformułowanego przez Piotra Curie stwierdzenia: *To dysymetria generuje występowanie zjawiska.*

P8. Odpowiedniki pomiędzy współczesną konwencją oznaczeń międzynarodowych Hermann’a–Mauguin’a (H-M) i konwencją Friedel’a (wykorzystującą pojęcia *holoedrii*, *bimiedrii*, *tetartoedrii*, etc.) można znaleźć, na przykład, w Tabeli 3.2.1.4 opracowania Hahna, *et al.* (Hahn 2016).

2. Komentarze końcowe

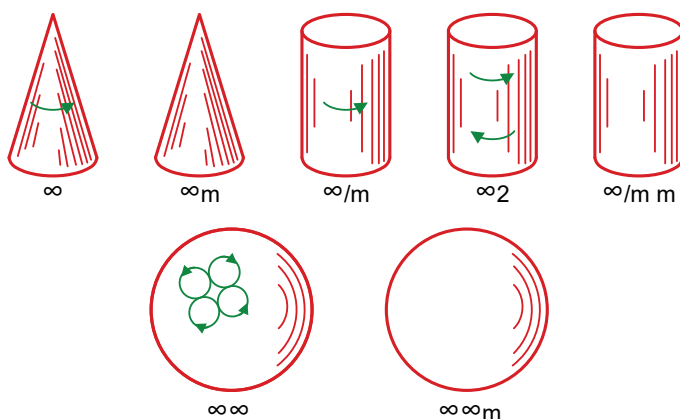
Warto wskazać kilka pozycji literaturowych, które mogą być bardzo pomocne dla łatwiejszego zrozumienia i ułatwić dalsze ewentualne wykorzystanie wyników pracy Piotra Curie do własnych potrzeb.

Podręcznik *Mineralogii dla szkół wyższych* (Anonim 2022) i *Notatki do wykładów z Mineralogii* (Nelson 2017) dostarczają w zwarty i przejrzysty sposób informacji o obecnym stanie wiedzy, współczesnej nomenklaturze krystalograficznej, a także graficznych materiałów poglądowo-ilustracyjnych np. trójwymiarowych modeli różnych kształtów krystalograficznych, zdjęć minerałów i wielu innych bardzo pomocnych informacji.

W rozdziale 3 zatytułowanym *Elementy krystalografii stosowanej* autorstwa Stanisława Skrzypka i Marcina Golego, książki *Inżynieria metali i technologii materiałowe* (Skrzypek, Przybyłowicz 2019) można zapoznać się z poprawną współczesną nomenklaturą krystalograficzną w języku polskim. W *Słowniku angielsko-polskim terminów krystalograficznych* można znaleźć angielskie odpowiedniki polskiej nomenklatury (Główka 2003).

Bardzo pomocne wyjaśnienia opisowe i rysunkowe terminów dotyczących elementów i pojęć z zakresu symetrii, między innymi wprowadzonego przez Piotra Curie pojęcia *granicznych grup punktowych*, jak również niestandardowych, nowatorskich elementów kinematycznych definiujących graniczne grupy symetrii zawiera artykuł A.V. Szubnikowa (Szubnikow 1956; ang. tłum. 1988). Na Rysunkach S4 i S5 zaadaptowane zostały Rysunki 1 i 2 z artykułu Szubnikowa zawierające geometryczną interpretację i schematyczne przedstawienie granicznych grup punktowych. Pomędzy oznaczeniami granicznych osiowych grup symetrii omawianymi przez Piotra Curie w sekcji 4 tłumaczonej pracy i nominalnymi oznaczeniami międzynarodowymi Hermanna–Mauguina (H-M) obowiązują następujące relacje równoważności: (a) $\leftrightarrow \infty/m m$, (b) $\leftrightarrow \infty 2$, (c) $\leftrightarrow \infty m$, (d) $\leftrightarrow \infty/m$, (e) $\leftrightarrow \infty$. Symetria pola elektrycznego to ∞m (nieruchomy stożek), symetria pola magnetycznego to ∞/m (obracający się walec). Symetria $\infty \infty m$ to izotropia (nieruchoma kula).

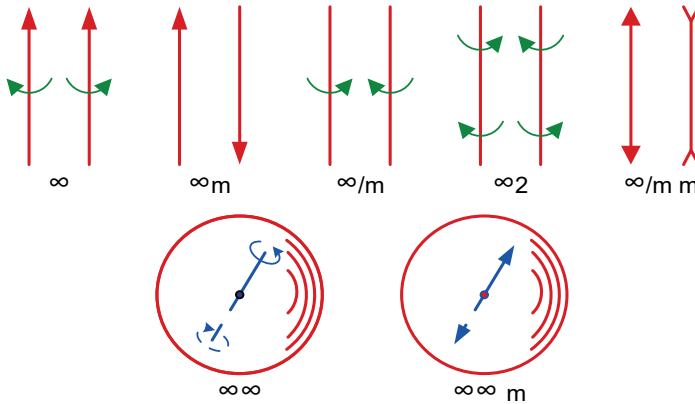
Wszystkie graniczne grupy symetrii zawierają ten sam *wspólny element symetrii*, tj. oś symetrii nieskończonego rzędu.



Rys. S4. Geometryczna interpretacja granicznych punktowych grup symetrii, adaptacja Rysunku 1 z pracy Szubnikowa (Szubnikow, 1956, ang. tłum. (1988)).

Elementy symetrii granicznych grup symetrii są następujące: Grupa *wirującego stożka* (∞) ma oś symetrii nieskończonego rzędu, Grupa *nie ruchomego stożka* (∞m) ma oś symetrii nieskończonego rzędu i nieskończoną liczbę płaszczyzn symetrii zawierających oś symetrii, Grupa *obracającego się walca* (∞/m) ma oś symetrii nieskończonego rzędu, jedną poprzeczną płaszczyznę symetrii i środek symetrii, Grupa *skręcanego się walca* ($\infty 2$) ma oś symetrii nieskończonego rzędu oraz nieskończoną liczbę poprzecznych dwukrotnych osi symetrii, Grupa *nie ruchomego walca* (∞/mm) ma oś symetrii nieskończonego rzędu, nieskończoną liczbę poprzecznych i podłużnych płaszczyzn symetrii, nieskończoną liczbę poprzecznych dwukrotnych osi symetrii oraz środek symetrii, Grupa *kuli bez płaszczyzn symetrii i bez środka symetrii* ($\infty\infty$) ma nieskończoną liczbę osi symetrii nieskończonego rzędu; to kula, której wszystkie średnice są skrócone w prawo lub w lewo, Grupa *nie ruchomej kuli* ($\infty\infty m$) ma nieskończoną liczbę osi symetrii nieskończonego rzędu, nieskończoną liczbę płaszczyzn symetrii, oraz środek symetrii.

Warto zwrócić uwagę, że próby opisu symetrii układów krystalograficznych z wykorzystaniem tensorów symetrycznych drugiego rzędu, spotykane czasami w literaturze krystalograficznej, w świetle obecnej wiedzy nie mogą zakończyć się sukcesem.



Rys. S5. Schematyczne przedstawienie granicznych grup punktowych symetrii, adaptacja Rysunku 2 z pracy Szubnikowa (Szubnikow, 1956, ang. tłum. 1988).

Poprawny opis tensorowy rozpatrywanych w mechanice ośrodków ciągłych klas symetrii (anizotropii) własności sprężystych materiałów trójwymiarowych (3D), tj. *symetrii zewnętrznych* tensora Hooke'a względem grupy tensorów ortogonalnych \mathbf{Q} ($\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}$) opisujących obroty i odbicia lustrzane, można znaleźć w pracy (Kowalczyk-Gajewska, Ostrowska-Maciejewska 2009). Można zidentyfikować relacje równoważności (odpowiedniości) istniejące pomiędzy klasami symetrii układów krystalograficznych i klasami symetrii materiałów liniowo sprężystych (klasami symetrii tensora Hooke'a), por. Tabela P1.

Za pomocą tensorów symetrycznych drugiego rzędu można poprawnie opisać symetrie materiałowe własności sprężystych materiałów dwuwymiarowych (2D). Opis taki można znaleźć w pracy (Blinowski *et al.* 1996).

Sandra Forte i Maurizio Vianello (Forte, Vianello 1996) udowodnili w 1996 roku, że istnieje maksymalnie 8 klas symetrii materiałowych dla materiału liniowo sprężystego (tensora Hooke'a). Należy pamiętać, że ustalenia Forte i Vianello obowiązują wtedy i tylko wtedy, gdy tensor opisujący własności materiałowe, tutaj tensor Hooke'a, posiada następujące *symetrie wewnętrzne*: $\mathbf{H}^{<1234>} = \mathbf{H}^{<2143>} = \mathbf{H}^{<3412>} (\sim H_{ijkl} = H_{jikl} = H_{klij})$ $i, k, l \in \{1, 2, 3\}$, gdzie H_{ijkl} oznaczają składowe tensora Hooke'a w dowolnej, ustalonej, bazie tensorowej.

Nie należy mylić modelu materiału, np. tensora Hooke'a, z rzeczywistym ciałem, np. materiałem krystalicznym. Tensor Hooke'a stanowi model liniowo-sprężystego zachowania i jego symetrie odzwier-

Tabela P1. Relacje równoważności pomiędzy klasami symetrii *układów krystalograficznych* i klasami symetrii *własności sprężystych materiałów liniowo sprężystych* (symetriaми zewnętrznymi tensora Hooke’a).

Nr	Kl. symetrii układu krystalograficznego	Nr	Klasa symetrii materiałowej	Uwagi
1.	trójskośna	1.	anizotropia	
2.	jednoskośna	2.	monokliniczna	
3.	rombowa	3.	ortotropowa	
4.	tetragonalna	4.	tetragonalna	
5.	trygonalna (romboedryczna)	5.	trygonalna	W najnowszych opracowaniach coraz częściej symetrie układów trygonalnego i heksagonalnego przyjmuje się za jeden układ krystalograficzny.
6.	heksagonalna		–	
	–	6.	poprzecznie izotropowa	Symetria poprzecznie izotropowa (walcowa) jest w nomenklaturze wprowadzonej przez Piotra Curie <i>symetrią graniczną</i> układu trygonalnego. Klasyczna systematyka układów krystalograficznych tej symetrii nie zawiera.
7.	regularna	7.	kubiczna	
	–	8.	izotropia	Izotropia jest symetrią graniczną układu regularnego, których klasyczna systematyka układów krystalograficznych nie zawiera.

ciędlają symetrie takiego zachowania. Jednakże za pomocą tensora Hooke’a modeluje się zachowanie zarówno materiałów krystalicznych jak i materiałów np. bezpostaciowych, o ile tylko zachowanie danego materiału w pewnym zakresie obciążeń można z dobrym przybliżeniem uznać za liniowe i sprężyste. Podział na układy krystalograficzne

oparty jest na wydzieleniu pewnych wspólnych elementów symetrii charakteryzujących budowę wewnętrzną materiałów krystalicznych. Nic nie stoi na przeszkodzie, by symetrie tensora Hooke'a pokrywały się w pewnym zakresie z symetriami układów krystalograficznych. Można się natomiast spodziewać, że symetrie tensora Hooke'a będą szersze (bogatsze) niż symetrie układów krystalograficznych (z punktu widzenia liniowo-sprężystego zachowania), gdyż tensor Hooke'a generalnie pozwala opisywać szerszy wachlarz materiałów niż tylko materiały krystaliczne. Rzeczywistość potwierdza to przypuszczenie, gdyż układy krystalograficzne nie obejmują symetrii granicznych, a symetrie tensora Hooke'a obejmują.

3. Matematyczne definicje symetrii wykorzystywanych w badaniach materiałowych

Poniżej przypomniano ściśle matematycznie współczesne definicje symetrii wewnętrznych (względem permutacji indeksów) i symetrii zewnętrznych (względem obrotów i odbić lustrzanych w przestrzeni trójwymiarowej) zbioru tensorów rzędu p wraz z definicjami niezbędnych do tego celu pojęć. Właśnie tego typu symetrie wykorzystuje się obecnie najczęściej do charakteryzowania symetrii własności materiałowych przy ich opisie tensorowym. Więcej informacji na ten temat można znaleźć w książce Janiny Ostrowskiej-Maciejewskiej (Ostrowska-Maciejewska 2007).

Definicja S1. Permutacją $\sigma \times$ tensora \mathbf{T} nazywamy odwzorowanie liniowe określone następującym przepisem

$$\begin{aligned} \sigma \times \mathbf{T}: \mathbf{T} = T_{12\dots p} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_p &\rightarrow \sigma \times \mathbf{T} = T_{12\dots p} \mathbf{e}_{\sigma(1)} \otimes \mathbf{e}_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{\sigma(p)}, \\ \sigma &\equiv \langle \sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(p) \rangle, \quad \mathbf{T}, \sigma \times \mathbf{T} \in \mathcal{T}^p, \end{aligned} \quad (\text{S.1})$$

gdzie $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(p)$ stanowi zadaną permutację p pierwszych liczb naturalnych $1, \dots, p$, zaś $T_{1,2,\dots,p}$ oznaczają składowe tensora \mathbf{T} rzędu p w bazie tensorowej $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_p$. Permutacja tensora oznacza zmianę porządku elementów składowych jego bazy tensorowej.

Operację permutacji można całkowicie równoważnie interpretować jako permutację składowych reprezentacji tensora rozpisanych w ustalonej bazie,

$$\sigma \times \mathbf{T} \equiv \langle \sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(p) \rangle \times \mathbf{T} = T_{\sigma(1) \sigma(2) \dots \sigma(p)} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_p \in \mathcal{T}^p, \quad (\text{S.2})$$

Dla operacji permutacji σ tensora dogodnie jest wprowadzenie następującej bardziej zwartej notacji $\sigma \times \mathbf{T} \equiv \langle \sigma(1), \dots, \sigma(p) \rangle \times \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}^{\langle \sigma(1) \sigma(2) \dots \sigma(p) \rangle}$. W przypadku, gdy wiadomo, że zmianie ulega porządek tylko dwóch indeksów to wygodne jest podawanie tylko tych indeksów, które ulegają zamianie np. w przypadku tensorów czwartego rzędu $\mathbf{T}^{\langle 4,2 \rangle}$ zamiast $\mathbf{T}^{\langle 1,4,3,2 \rangle}$.

Operacja permutacji jest automorfizmem, tj. odwracalną liniową transformacją przestrzeni tensorowej \mathcal{T}^p na siebie ($\sigma: \mathcal{T}^p \xrightarrow{\text{nia}} \mathcal{T}^p$).

Zbiór wszystkich transformacji permutacji, działających w przestrzeni tensorów ustalonego rzędu, stanowi grupę (\mathcal{P}^σ), por. Definicja S9, co pozwala na wprowadzenie pojęcia *symetrii wewnętrznej tensorów*. Wielkość tej grupy jest skończona i wynosi $p!$ elementów, na przykład dla tensorów 4 rzędu są $4! = 24$ elementy tej grupy.

Definicja S2. Grupą *symetrii wewnętrznej tensora* $\mathbf{T} \in \mathcal{T}^p$ nazywamy podzbiór grupy permutacji \mathcal{P}^σ , którego elementy spełniają warunek

$$\mathcal{P}_\mathbf{T}^\sigma \equiv \{ \sigma \in \mathcal{P}^\sigma; \sigma \times \mathbf{T} = \mathbf{T} \}, \quad \mathcal{P}_\mathbf{T}^\sigma \subset \mathcal{P}^\sigma. \quad (\text{S.3})$$

Tensor \mathbf{T} spełniający warunek S.3 nazywane są tensorami (*wewnętrznie*) *symetrycznymi* względem permutacji $\sigma \in \mathcal{P}_\mathbf{T}^\sigma$.

Tensor \mathbf{T} jest (*wewnętrznie*) *symetryczny* po parze wskaźników (α, β) , jeśli zachodzi równość, $\mathbf{T} = \mathbf{T}^{\langle \beta, \alpha \rangle}$, $\sim T_{\dots \alpha \dots \beta \dots} = T_{\dots \beta \dots \alpha \dots}$, tj. wtedy, gdy współczynniki reprezentacji tensora \mathbf{T} w dowolnej ustalonej bazie przy zamianie miejscami indeksów (α, β) są takie same. W przypadku tensorów czwartego rzędu operacja symetrii ze względu na permutację $\langle 1,3,2,4 \rangle \times$ oznacza $\mathbf{T} = \mathbf{T}^{\langle 1,2,3,4 \rangle} = \mathbf{T}^{\langle 1,3,2,4 \rangle}$, tj., $T_{ijkl} \rightarrow T_{ikjl}$ w dowolnej ustalonej bazie.

Definicja S3. Tensor jest *absolutnie (wewnętrznie) symetryczny*, gdy grupą jego wewnętrznych symetrii jest cały zbiór permutacji $\mathcal{P}_\mathbf{T}^\sigma = \mathcal{P}^\sigma$.

Definicja S4. Zbiór tensorów drugiego rzędu \mathbf{Q} o własnościach,

$$\mathcal{O} = \{ \mathbf{Q} \in \mathcal{T}^2; \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{1}, \quad \det \mathbf{Q} = \pm 1 \} \quad (\text{S.4})$$

jest grupą i jest nazywany *grupą tensorów ortogonalnych*.

Definicja S5. Podzbiór tensorów ortogonalnych, dla których

$$\mathcal{R} = \{ \mathbf{Q} \in \mathcal{T}^2; \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{1}, \quad \det(\mathbf{Q}) = +1 \}, \quad \mathcal{R} \subset \mathcal{O} \quad (\text{S.5})$$

jest grupą i jest nazywana *właściwą (specjalną) grupą ortogonalną* lub *grupą rotacyjną*. W literaturze często spotyka się oznaczenie tej grupy poprzez symbol SO_3 , w przypadku trójwymiarowej przestrzeni Euklidesowej generującej rozważaną przestrzeń tensorową.

Definicja S6. Grupą *zennętrznej symetrii* tensora $\mathbf{T} \in \mathcal{T}^p$ (p oznacza rząd tensora) nazywamy podzbiór wszystkich tensorów ortogonalnych \mathbf{Q} , które spełniają następujący warunek

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathbf{T}} = \{ \mathbf{Q} \in \mathcal{O}; \mathbf{Q} * \mathbf{T} = \mathbf{T} \}, \quad \mathcal{O}_{\mathbf{T}} \subseteq \mathcal{O} \\ (\mathbf{Q} * \mathbf{T} \leftrightarrow Q_{ia} Q_{jb} \dots Q_{kc} T_{ab\dots c}). \end{aligned} \quad (\text{S.6})$$

Tensory \mathbf{T} spełniające warunek S.6 nazywamy *symetrycznymi* względem przekształceń ortogonalnych $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}_{\mathbf{T}}$.

Definicja S7. Tensor jest *izotropowy*, gdy grupą jego zewnętrznej symetrii jest cały zbiór tensorów ortogonalnych $\mathcal{O}_{\mathbf{T}} = \mathcal{O}$, por. (S.4).

Definicja S8. Tensor jest *hemitropowy* (zwany także *właściwym-izotropowym*), gdy grupą jego zewnętrznej symetrii jest cały zbiór właściwych tensorów ortogonalnych $\mathcal{O}_{\mathbf{T}} = \mathcal{R}$, por. (S.5).

Uwaga. Powyższe definicje klarownie pokazują, że własność symetrii jest cechą tensora, jako zintegrowanej całości złożonej z bazy i reprezentacji (macierzy składników w danej bazie), a nie tylko macierzy składników tensora.

Przykład. Jeżeli tensor czwartego rzędu wykazuje trzy *symetrie wewnętrzne* $\mathbf{T} \equiv \mathbf{T}^{<1,2,3,4>} = \mathbf{T}^{<2,1,3,4>}$, $\mathbf{T} = \mathbf{T}^{<1,2,4,3>}$, $\mathbf{T} = \mathbf{T}^{<3,4,1,2>}$ oraz jego wszystkie wartości własne są nieujemne to jest to tzw. tensor Hooke'a, za pomocą którego określa się (modeluje się) własności materiału liniowo sprężystego. *Symetrie zewnętrzne* tensora Hooke'a, to jest jego niezmienniczość przy poddawaniu go działaniu tensorami ortogonalnymi \mathbf{Q} z pewnych podzbiorów określa symetrie modelowanego za jego pomocą materiału.

Pojęcie grupy stanowi jedno z najważniejszych pojęć szeroko wykorzystywanych przy budowaniu teorii (modeli) rzeczywistych zjawisk fizycznych.

Definicja S9. Grupą nazywana jest *struktura algebraiczna* $G \equiv (\{G\}, \diamond)$ składająca się z niepustego zbioru *elementów* $\{G\}$, i działania (*operacji*) " \diamond " przypisującej element z $\{G\}$ do dowolnej pary elementów z $\{G\}$

$(\diamond: (g, b) \in \{G\} \times \{G\} \Rightarrow g \diamond b \in \{G\})$, gdy działanie \diamond spełnia następujące aksjomaty

$$(i) \bigwedge_{g_1, g_2, g_3 \in G} g_1 \diamond (g_2 \diamond g_3) = (g_1 \diamond g_2) \diamond g_3, \\ (ii) \bigvee_{e \in G} \bigwedge_{g \in G} e \diamond g = g \diamond e = g, \quad (iii) \bigwedge_{g \in G} \bigvee_{b \in G} g \diamond b = b \diamond g = e \quad (S.7)$$

\diamond jest łączne (i), istnieje *element neutralny* grupy (ii), dla każdego elementu grupy istnieje *element odwrotny* (iii).

Grupę nazywamy przemienną (Grupą *Abelową*), gdy działanie \diamond jest przemienne (iv) $\bigwedge_{g, b \in G} g \diamond b = b \diamond g$.

Bibliografia do Komentarza tłumacza

Anonim 2022: *Free Textbook for College-Level Mineralogy Courses (Bezpłatny podręcznik Mineralogii dla Szkół Wyższych)*. II wyd., szczególnie rozdziały 10, 11 i 13. URL: <https://opengology.org/Mineralogy/> (dostęp: marzec 2023).

Blinowski, Andrzej; Ostrowska-Maciejewska, Janina; Rychlewski, Jan 1996: Two-dimensional Hooke's tensors—*isotropic decomposition, effective symmetry criteria* (Dwuwymiarowe tensory Hooke'a – rozkład izotropowy, efektywne kryteria symetrii). *Archiwum Mechaniki* 48(2), ss. 325–345. URL: <https://am.ippt.pan.pl/am/article/view/v48p325> (dostęp: marzec 2023).

Forte Sandra, Vianello Maurizio 1996: *Symmetry Classes for Elasticity Tensors* (Klasy symetrii tensorów sprężystości). *Journal of Elasticity* 43, ss. 81–108.

Główka, Marek (Przew. Kom. Red.) 2003: *Słownik terminów krystalograficznych angielsko-polski*. Łódź. Praca Zbiorowa. URL: <http://www.krystalografia.us.edu.pl/stk.pdf> (dostęp: marzec 2023).

Hahn, Theo; Klapper, Helmut; Müller, Uwe; Aroyo, Mois Ilia 2016: Section 3.2.1 Point groups and crystal classes (Grupy punktowe i klasy kryształów). *International Tables for Crystallography* vol. A, ss. 720–737. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/iucr/itc/Ac/ch3o2v0001/ch3o2.pdf> (dostęp: marzec 2023).

Lord Kelvin–Thomson, William 1894: *The molecular tactics of a crystal (Molekularna taktyka kryształu)*. Oxford: Clarendon Press. URL: <https://www.gutenberg.org/cache/epub/54976/pg54976-images.html> (dostęp: marzec 2023).

Kowalczyk-Gajewska, Katarzyna; Ostrowska-Maciejewska, Janina 2009: Review on Spectral Decomposition of Hooke's Tensor for All Symmetry Groups of Linear Elastic Material (Przegląd dotyczący spektralnego rozkładu tensora

- Hooke'a dla wszystkich grup symetrii liniowego materiału sprężystego). *Engineering Transactions* 57 (3–4), ss. 145–183. URL: <https://et.ippt.gov.pl/index.php/et/article/view/172> (dostęp: marzec 2023).
- Nelson, Stephen 2017: *Mineralogy, Lecture Notes* (Kurs mineralogii. Notatki do wykładów). URL: <https://www2.tulane.edu/~sanelson/eens211/#LectureNotes> (dostęp: marzec, 2023).
- Ostrowska-Maciejewska, Janina 2007: *Podstawy i zastosowania rachunku tensorowego*. Raporty IPPT. Warszawa. URL: http://prace.ippt.gov.pl/IFTR_Reports_1_2007.pdf (dostęp: marzec 2023).
- Pauffer, Peter; Filatov, Stanislav 2020; E.S. Fedorov Promoting the Russian-German Scientific Interrelationship. *Minerals* 10(2), 181. DOI: [10.3390/min10020181](https://doi.org/10.3390/min10020181). URL: <https://www.mdpi.com/2075-163X/10/2/181> (dostęp: marzec 2023).
- Rychlewski, Jan 1991a: *Symetria przyczyn i skutków*. Warszawa: PWN.
- Rychlewski, Jan 1991b: *Wymiary i podobieństwo*. Warszawa: PWN.
- Rychlewski, Jan 1991c: Dodatek B. Symetria. [W:] Jan Rychlewski, *Wymiary i podobieństwo*. Warszawa: PWN, ss. 171–184.
- Scholz, Erhard 1989: Die Symmetriekonzepte der Kristallographie und ihre Beziehungen zur Algebra des 19. Jahrhunderts. [In:] *Symmetrie, Gruppe, Dualität. Science Networks Historical Studies*, vol. 1. Birkhäuser Basel. DOI: [10.1007/978-3-0348-9267-4_2](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-9267-4_2).
- Skrzypek, Stanisław, Przybyłowicz, Karol (red.) 2019: *Inżynieria metali i technologie materiałowe*. Warszawa: PWN. URL: <https://home.agh.edu.pl/~krystal/file.pdf> (dostęp: marzec 2023).
- Szubnikov (Shubnikov) Aleksiej Wasiljewicz 1956/1988: O rabotah Pera Kjuri w Oblasti Simmetrii. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk* 59, ss. 591–602. Angielskie tłumaczenie rosyjskiego oryginału: On the Works of Pierre Curie on Symmetry. *Modern Applied Mathematics and Computer Science* 16(5–8), ss. 357–364. (Tłum. L.I. Man). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0898122188902258> (dostęp: marzec 2023).
- Weyl, Hermann 1952: *Symmetry*. Princeton: Princeton University Press.