

Michał Kokowski

ORCID [0000-0002-5389-9051](https://orcid.org/0000-0002-5389-9051)

Instytut Historii Nauki im. Ludwika i Aleksandra Birkenmajerów
Polskiej Akademii Nauk (Warszawa – Kraków, Polska)

michal.kokowski@gmail.com

Władysław Natanson i Alfred Landé a prawo Plancka, statystyka Boltzmann-Plancka-Natansona oraz statystyka Bosego

Abstrakt

Artykuł opisuje kontekst i treść przeoczonej dotąd przez historyków fizyki korespondencji z listopada 1925 roku na temat prawa Plancka i statystyki Bosego pomiędzy Władysławem Natansonem a Alfredem Landé i konsekwencje tej korespondencji.

W artykule publikowane są po raz pierwszy tłumaczenia z języka niemieckiego na język polski dwóch listów Natansona i Landégo.

Słowa kluczowe: *Władysław Natanson, Ladislas Natanson, Alfred Landé, prawo Plancka, metoda statystyczna Boltzmann, statystyka Boltzmann, statystyka Boltzmann-Plancka-Natansona, statystyka Bosego, statystyka Boltzmann-Plancka-Natansona-Bosego.*

| | | | | |
|--|---|--|--|--|
| INFORMACJA O PUBLIKACJI |  | e-ISSN 2543-702X ISSN 2451-3202 |  |  BRYLANTOWY MODEL OTWARTEGO DOSTĘPU |
| <p style="text-align: center;">CYTOWANIE</p> <p>Kokowski, Michał 2021: Władysław Natanson i Alfred Landé a prawo Plancka, statystyka Boltzmann-Plancka-Natansona oraz statystyka Bosego. <i>Studia Historiae Scientiarum</i> 20, ss. 509–567. DOI: 10.4467/2543702XSHS.21.015.14046.</p> | | | | |
| OTRZYMANO: 05.05.2021 ZAAKCEPTOWANO: 18.07.2021 OPUBLIKOWANO ONLINE: 13.09.2021 | POLITYKA ARCHIWIZOWANIA Green SHERPA / RoMEO Colour | LICENSE  |  | |
| WWW | https://ojs.ejournals.eu/SHS/ ; http://pau.krakow.pl/Studia-Historiae-Scientiarum/archiwum | | | |

Ladislav Natanson and Alfred Landé versus Planck's law, the Boltzmann-Planck-Natanson statistics and the Bose statistics

Abstract

The article describes the context and content of the correspondence from November 1925, so far overlooked by physics historians, on the Planck law and the Bose statistics between Władysław (Ladislav) Natanson and Alfred Landé and the effects of this interaction.

The article publishes for the first time the translations from German into Polish of two letters from Natanson and Landé.

Keywords: *Władysław Natanson, Ladislav Natanson, Alfred Landé, Boltzmann's statistical method, Boltzmann statistics, Planck's law, Planck statistics, Bose statistics, Boltzmann-Planck-Natanson statistics, Boltzmann-Planck-Natanson-Bose statistics.*

1. Wstęp

Jak dotąd w pracach historyków fizyki nie można znaleźć informacji czy Władysław Natanson kiedykolwiek zareagował na fakt ukazania się dwóch artykułów Satyendra Natha Bosego (1924a; 1924b) dotyczących prawa Plancka lub tzw. statystyki Plancka.¹

¹ Zob. np. Whithaker 1953; Jammer 1966, s. 51; Hund 1967 (przekłady: 1974, 1975, 1980); Mehra 1975; Średniawa 1985, ss. 89–90; 2000, ss. 454–455; 1996/2006; Lange 1992a; 1992b, s. 132; 1997; Wali 2006; Konieczny 2011; 2012; Nagasawa 2018, s. 412; Saunders 2020; Spalek 2005a, s. 15 / 2005b, s. 152; 2020; Badino 2021.

^kwestia ta nie była analizowana w najobszerniejszej aktualnie pracy na temat recepcji dokonań Natansona dotyczących tzw. statystyki Bosego-Einsteina (Kokowski 2019). Wspomniano w niej jednak, że 18 listopada 1925 r. Alfred Landé skierował z Tybingi do Władysława Natansona list (Landé 1925 (*dokument archiwalny*)), Walther Gerlach i Alfred Landé w 1926 r. zacytowali artykuł Natansona z 1911 roku w wersji niemieckiej (Kokowski 2019, s. 379) oraz że sam Natanson w swoim artykule pt. „O promieniowaniu” (II wersja) opublikowanym w książce *Oblicze natury: odczyty, przemówienia i szkice* (ss. 125–151) z prozaicznego powodu milczał o artykule Bosego, gdyż książka ta ukazała się przed opublikowaniem artykułu Bosego (Kokowski 2019, s. 342). Po dodatko-

Z drugiej zaś strony z tego rodzaju opracowań wiadomo, że pewną rolę w wyjaśnianiu nowego opisu promieniowania elektromagnetycznego odegrał w latach 1925–1926 Alfred Landé (1888–1976). Dokonał tego za sprawą czterech publikacji o kwantach światła (Landé 1925; 1926a; 1926b; Landé, Gerlach 1926) i korespondencji na ten temat z Erwinem Schrödingerem, o której był też informowany Albert Einstein.²



Fig. 1. Władysław Natanson, około 1910 r.
Źródło: Majkowska, Fialek (red.) 2009, illustration 14.



Fig 2. Alfred Landé około 1940 r. (by unknown author – Aus dem Privatbesitz der Familie Landé, Public Domain).
Źródło: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=17990743>.

Celem tego artykułu jest *wykazanie na podstawie zachowanych źródeł i ich interpretacji w świetle metodologii historii fizyki*³, że Władysław Natan-

wych badaniach udało mi się ustalić ponad wszelką wątpliwość, że książka Natasona została opublikowana przed 14 kwietnia 1924, gdyż 14 kwietnia 1924 r. została już zrecenzowana w czasopiśmie *Wiadomości Literackie* – zob. Wasowski 1924, s. 3. Ponadto, ponieważ wiadomo, że Bose przesłał swój artykuł do *Zeitschrift für Physik* dopiero 2 czerwca 1924 r. i nie prowadził korespondencji z Natansonem, jest wysoce prawdopodobne albo niemal pewne, że Natanson nie wiedział o istnieniu artykułu Bosego w czasie, gdy ukazywała się książka Natasona.

² Zob. np. Mehra, Rechenberg 1987, ss. 417–419.

³ Zob. Dodatek 1.

son przynajmniej raz jawnie zareagował na wspomniane artykuły Bosego i ma to ścisły związek ze wspomnianymi powyżej pracami Alfreda Landégo i Walthera Gerlacha.

2. Artykuł Landégo z sierpnia 1925 roku

19 czerwca 1925 roku Landé przesłał do *Zeitschrift für Physik* artykuł pt. „Lichtquanten und Kohärenz” („Kwanty światła i koherencja”),⁴ który ukazał się już w sierpniu tego roku (tom 33, ss. 571–578).⁵ W abstrakcie artykułu Landé naszkicował treść tej pracy:

Według Bosego, jeśli chcemy wyprowadzić formułę promieniowania Plancka z teorii kwantów światła, można to zrobić tylko za pomocą podejścia prawdopodobieństwa, które postrzeżga kwanty światła jako struktury zależne statystycznie w niewyjaśniony sposób i przypisuje się im polaryzację. To podejście prawdopodobieństwa można również uzasadnić poprzez statystyczną niezależność kwantów świetlnych, jeżeli, analogicznie do klasycznej interferencji falowej, rezygnuje się ze skalarne go dodawania kwantu ϵ w każdym pakiecie kwantowym na rzecz superpozycji

⁴ Historycy fizyki z reguły pomijają ten artykuł Landego z 1925 r. Nie zwrócili na niego uwagę np. Whithaker 1953; Jammer 1966; Hund 1967 (przekłady: 1974, 1975, 1980); Mehra [1975](#); Kuhn 1978; Kastler 1983; Średniawa 1985; 2000; [1996/2006](#); Bergia 1987; Lange [1992a](#); [1992b](#); 1997; Stachel 2002; Wali [2006](#); Hentschel [2006](#); 2018; Waniek, Hetschel [2011](#); Konieczny 2011; [2012](#); Passon, Grebe-Ellis [2017](#); Nagasawa [2018](#); Saunders [2020](#); Spalek [2005a](#), s. 15 / [2005b](#), s. 152; [2020](#); Badino [2021](#).

⁵ Nieliczni, którzy odnotowali ten artykuł, np. Raman, Forman 1969, s. 313 i przyp. 66; Hanle 1977, s.; 186; Wessels 1979, s. 322, przyp. 51 i 52; Rechenberg [1982](#); Mehra, Rechenberg [2001](#), s. 418; Kojevnikov [2002](#), s. 202; Lehner, Renn, Joas, Badino [2007](#), ss. 6–7, 9, 12; Fick, Kant [2013](#), ss. 109, w najlepszym przypadku skupili się na idei powrotu do teorii falowej światła i kwantowej interferencji Landego oraz nie dostrzegli związku artykułu Landego z publikacją Natansona (1911a / 1911c). Takie zachowanie ma swoje uzasadnienie, gdyż nie zauważyli tego związku także Erwin Schrödinger w liście z 3 listopada 1925 r. do Alberta Einsteina (Einstein 2018, doc. [101](#), ss. 182–183) i w liście z 16 listopada 1925 r. do Alfreda Landego (Schrödinger 1925 (*dok. arch.*)) oraz Walther Bothe (1927), choć w każdym z tych przypadków wspomniano tę publikację Landego.

⁵ Z perspektywy redaktora czasopisma naukowego to bardzo krótki okres na przeprowadzenie rzetelnej procedury recenzyjnej i rzetelne opracowanie redakcyjne tekstu.

$\sqrt{\varepsilon}$ z losowo rozmieszczonymi fazami, przy jednoczesnym dopuszczeniu jedynie całkowitych energii wiązki kwantowej. Wskazano na związek tego interferencyjnego podejścia z teorią degeneracji gazu Einsteina. Wiązki kwantowe również okazują się kluczowe dla wymiany energii między promieniowaniem a materią (tłum. – M.K).⁶

Landé rozwinął te wątki w kolejnych częściach artykułu. W pierwszym podrozdziale przypomniał on kwantowe wyprowadzenie czynnika $8\pi\nu^2/c^3$, we wzorze na gęstość stanów energetycznych promieniowania ciała doskonale czarnego, przez Bosego (Bose 1924a, ss. 179–180; Landé 1925a, ss. 571–572).

Następnie Landé rozważył konkretny przypadek i wyznaczył liczbę możliwych rozkładów *czterech* kwantów światła w *trzech* komórkach fazowych o wielkości h^3 , ustalonej przez Plancka⁷. Liczba tych równie prawdopodobnych rozkładów wynosi 15 (Landé 1925a, s. 573, tabela 1).⁸ Oto one:

Tab. 1.

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Kom. nr 1 | 4 | 0 | 0 | 3 | 3 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 2 | 0 | 2 | 1 | 1 |
| Kom. nr 2 | 0 | 4 | 0 | 1 | 0 | 3 | 3 | 0 | 1 | 2 | 0 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| Kom. nr 3 | 0 | 0 | 4 | 0 | 1 | 0 | 1 | 3 | 3 | 0 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 |

Komentując te wyniki, Landé zwrócił uwagę, że kwanty światła mogłyby być jednak *a priori* niezależne, a przez to i odróżnialne:

Nie jest bynajmniej oczywiste, że te 15 możliwości jest równie prawdopodobnych („mają taką samą wagę”). Wręcz

⁶ Niemiecki oryginał cytowanego tekstu zob. Landé 1925a, s. 571 i Kokowski 2021.

⁷ Planck (1906) rozważał liczbę możliwych różnych konfiguracji ΔN kwantów energii w ΔA oscylatorach; Debye (1910) – ΔN kwantów energii w ΔA wibracji naturalnych; natomiast Laue (1914) – ΔN kwantów energii w niezależnych wiązkach promieni.

⁸ Wynik taki (tzn. 15 przypadków) podał już wcześniej Planck (1906, pp. 152–153), który podał czterocyfrowe liczby, takiej postaci, że każda z cyfr wynosi 1 albo 2 albo 3, jeśli element energii znajduje się w rezonatorze 1 albo 2 albo 3. Wynik taki podał także Natanson, stosując prostszy zapis tych przypadków (1911a, ss. 137–138, § 3; 1911c, ss. 660–661, § 3; 1913, ss. 58–61, § 42). Zapis Natansona powtórzył też Landé (bez nawiązania do Natansona).

przeciwnie, zakładając wzajemnie niezależne kwanty, należałoby się spodziewać a priori, że rozkład (3, 1, 0) byłby czterokrotnie ważniejszy niż rozkład (4, 0, 0), ponieważ ten ostatni można zrealizować tylko w jeden sposób, w jaki wszystkie cztery kwanty a, b, c, d mieszczą się w komórce nr 1: (abcd, 0, 0), w przeciwieństwie do pierwszego, który można zrealizować na cztery sposoby: (abc, d, 0), (abd, c, 0), (acd, b, 0), (bcd, a, 0) (tłum. – M.K.).⁹

Co za tym idzie:

Równe prawdopodobieństwo powyższych 15 rozkładów czterech kwantów w trzech komórkach należy zatem traktować jako szczególne niejawne założenie fizyczne, leżące u podstaw obliczeń Bosego i którego treści należy doszukiwać się w zdolności kwantów do inferencji [...] (tłum. – M.K.).¹⁰

Innymi słowy, równe prawdopodobieństwo takich 15 konfiguracji oznacza, że Bose – a także wcześniej Planck, o czym nie wspomniał jednak Landé – przyjęli w swych modelach niejawne fizyczne założenie, nieodróżnialność kwantów świata o tej samej energii.

Według Landégo przyczyną tego efektu jest „koherencja kwantów światła” (1925a, s. 571) albo „pewna własność interferencyjna” kwantów światła (1925a, s. 573), albo „interferencja kwantów światła” (1925a, s. 574); manifestuje się ona w wyprowadzeniu przez Bosego termodynamicznego prawdopodobieństwa makroskopowo zdefiniowanego rozkładu kwantów światła, w którym korzysta się ze wzoru na liczbę permutacji z powtórzeniami (Bose 1924a, ss. 180–181 / wersja ang.: Bose 1976, s. 1057).

Zdaniem Landégo w ogólnym przypadku liczba możliwych konfiguracji (ΔW) ΔN kwantów w ΔA komórkach według schematu rachunkowego Bosego określa wzór:

$$\Delta W = \frac{(\Delta N + \Delta A - 1)!}{(\Delta A - 1)! \Delta N!} \quad (\text{Landé 1925a, s. 573, wzór 2}),$$

⁹ Niemiecki oryginał cytowanego tekstu zob. Landé 1925a, s. 573 i Kokowski 2021.

¹⁰ Jak wyżej.

który jest liczbą «kombinacji z powtórzeniami ΔA elementów z ΔN klas» (Landé 1925a, s. 573, wzór 2).

Twierdząc to, Landé przeoczył wspomnieć w tym kontekście, że wzór ten podał już Boltzmann (1877/[1909](#) s. 181), Planck ([1900](#), s. 240; [1906](#), s. 152) oraz Natanson (1911a, s. 136; 1911c, s. 660), który cytował Boltzmann i Plancka, natomiast nie podał tego wzoru w swoich publikacjach sam Bose (1924a; 1924b).

Zdaniem Landégo, doprowadziło to Plancka do wyprowadzenia wzoru:

$$\frac{\Delta E}{\Delta A} = \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT} - 1} \quad (\text{Landé 1925a, s. 573, wzór 3}).$$

Następnie Landé – wzorem (niewymienionych z nazwiska) Boltzmann i Natansona – wyprowadził rozkład Plancka z założenia nieodróżnialności kwantów światła i odróżnialności komórek.¹¹ Punktem wyjścia było określenie liczby różnych konfiguracji Δw N kwantów światła w ΔA komórek, która jest określona rozkładem wielomianowym dla liczb obłożenia grup („occupancy numbers of groups”) zamiast dla samych liczb obłożenia, to jednocześnie permutacja liczby ΔA komórek z powtórzeniami liczb nieodróżnialnych kwantów światła w komórkach $j = 0, 1, 2, \dots$ – z analogicznego wzoru korzystał już np. Boltzmann (1877/[1909b](#), s. 176, wz. 3; s. 187 i Planck ([1906](#), s. 152))¹²:

¹¹ Zob. Klein 1962, ss. 472–474 (porównanie podejścia Boltzmann i podejścia Plancka); Kuhn 1978, ss. 102–110 (opis podejścia Plancka); Pais 1979, ss. 893–895 (porównanie podejścia Boltzmann i Bosego); 1982, ss. 370, 423–428; 1986, s. 283 (porównanie podejścia Plancka i Bosego); Mehra, Rechenberg 1982/[2001](#), ss. 566–569 (porównanie podejścia Plancka i Bosego); Bergia 1987, ss. 223–227 / 2009, ss. 333–337 (porównanie podejścia Boltzmann i Bosego); Bach 1988 (porównanie m.in. podejścia Boltzmann, podejścia Plancka, podejścia Natansona oraz Bosego); Bach 1990 (porównanie m.in. podejścia Boltzmann, podejścia Plancka oraz podejścia Natansona); Monaldi 2009, ss. 387–388; 2019, ss. 319–320, 323–324 (porównanie podejścia Boltzmann, podejścia Plancka oraz podejścia Natansona); Enders [2016](#) (porównanie podejścia Boltzmann i podejścia Plancka); Saunders 2020, ss. 48–49 (porównanie podejścia Boltzmann i podejścia Natansona).

¹² U Boltzmann (1877/[1909b](#), s. 176), to tzw. permutowalność rozkładu energii $\Pi = n! / (w_0!w_1!\dots)$, czyli liczba możliwych konfiguracji, kompatybilnych kompleksji, dla energii układu E . Od czasów Boltzmann wzór ten odgrywa ważną rolę w fizyce statystycznej zarówno klasycznej, jak i kwantowej. Suma permutowalności to $J = (\lambda+n-1)! / ((n-1)! \lambda!)$ (Boltzmann 1877/[1909b](#), s. 181) ma taką samą postać jak ΔW Landégo (zob. wzór podany na poprzedniej stronie). Planck ([1906](#), s. 152) określał ją

$$\Delta w = \frac{(\Delta A)!}{(p_0 \Delta A)! (p_1 \Delta A)! (p_2 \Delta A)! \dots} \quad (\text{Landé 1925a, s. 574, wzór 8}),$$

gdzie p_j i $p_j \Delta A$ – prawdopodobieństwo znalezienia j -kwantów światła w komórce ΔA i liczba nieodróżnialnych kwantów światła w komórkach $j = 0, 1, 2, \dots$

W kolejnym kroku Landé przyjął dwa elementarne założenia dla liczb obłożenia, znane co najmniej od Boltzmann (1877/[1909](#), ss. 175–176, wzory 1 i 2, s. 205), zob. Landé 1925a, s. 575, wzór 9:

$$\sum_j p_j = 1, \quad \sum_j p_j \varepsilon_j = \frac{\Delta E}{\Delta A}$$

i wykorzystał znany, elementarny warunek, by $\log \Delta w$ osiągał maksimum. W konsekwencji wyznaczył wartość:

$$p_j = B e^{-j\varepsilon\beta} \quad (\text{Landé 1925a, s. 575, wzór 10}).$$

Dodatkowo, ponieważ:

$$\sum_j p_j = 1, \quad B = 1 - e^{-\varepsilon\beta},$$

$$p_j = (1 - e^{-\varepsilon\beta}) e^{-j\varepsilon\beta} \quad (\text{Landé 1925a, s. 575, wzór 10}').$$

Stąd średnia energia \bar{u} na komórkę wynosi:

$$\bar{u} = \frac{\Delta E}{\Delta A} = \sum_j \varepsilon_j p_j = \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon\beta} - 1} \quad (\text{Landé 1925a, s. 575, wzór 11}).$$

Z uwagi na wzór 3, $\beta = 1/kT$ i stąd Landé otrzymał ostatecznie:

$$p_j = (1 - e^{-\varepsilon/kT}) e^{-j\varepsilon/kT} \quad (\text{Landé 1925a, s. 575, wzór 10}'').$$

Dla granicznego przypadku $\varepsilon \ll kT$, Landé otrzymał ostatecznie:

$$p_j = \frac{\varepsilon}{kT} e^{-j\varepsilon/kT} \quad (\text{Landé 1925a, s. 575}),$$

a po wstawieniu $\bar{u} = kT$:

$$p_j = \frac{\varepsilon}{\bar{u}} e^{-j\varepsilon/\bar{u}} \quad (\text{Landé 1925a, s. 575, wzór 12}).$$

mianem *Wahrscheinlichkeit* (prawdopodobieństwo) i oznaczał symbolem W ; natomiast według Boltzmann $W = \Pi/J$. Wiedział o tych kwestiach Natanson (1911a, ss. 136–138; 1911c, s. 660–661); zob. też przyp. 20 (poniżej) i Darrigol [1991](#), szczególnie ss. 244–250; 257; 293.

Landé uważał dodatkowo, że każdy kwant światła należy traktować jako falę i przypisać jej nie tylko polaryzację i amplitudę ($\sqrt{\varepsilon}$), ale także fazę (φ): $\sqrt{\varepsilon} \cdot e^{i\varphi}$ oraz jako wielkość wektorową (a nie skalarną), skutkiem czego superpozycja kwantów światła jest składaniem wektorów (Landé 1925a, ss. 575–577). Ponadto zdaniem Landé’go analogiczny efekt „interferencji lub superpozycji molekul” istnieje także w teorii gazów Einsteina (Landé 1925a, ss. 577–578).¹³

3. Zapomniany list z Archive for the History of Quantum Physics, 1898–1950.

W Archive for the History of Quantum Physics, 1898–1950, przechowywanym w American Philosophical Society Library (Philadelphia, PA, USA), znajduje się zapomniany przez historyków fizyki list Władysława Natanson’a do Alfreda Landé, wysłany 14 listopada 1925 r. z Krakowa do Tybingi (jest on umieszczony w “Volume reel 4: reel-frame 19, Call Number Mss.530.1.Ar2”).

Natanson skierował napisany po niemiecku list do Landé’go po lekturze jego artykułu z sierpnia 1925 r. (Landé 1925a), który dotarł do Krakowa dopiero w listopadzie 1925 r.:

a) odniósł się w nim do głoszonych przez Landé’go tez;

b) przypomniał fakt, że w marcu 1911 roku opublikował *po angielsku* artykuł w *Bulletin International de l’Academie des Sciences de Cracovie. Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles Série A; Sciences Mathématiques* (ss. 134–148 = Natanson 1911a),¹⁴ a w sierpniu 1911 r. jego niemieckie tłumaczenie „Über die statistische Theorie der Strahlung” w *Physikalischen Zeitschrift wydawanym w Lipsku* (tom XII, ss. 659–666 = Natanson 1911c), w którym szczegółowo analizował kwestię nieodróżnialności kwantów w wyprowadzeniu prawa Plancka i omawiał te same lub

¹³ Landé powtórzył te same rozważania także w monografii *Die neuere Entwicklung der Quantentheorie* (1926b, ss. 13–19). Powrót Landé’go do interpretacji falowej (wektorowej superpozycji kwantów) w wyprowadzeniu prawa Plancka wzbudził zainteresowanie Erwina Schrödingera – zob. dwa listy z 28 października 1925 r. i 16 listopada 1925: Schrödinger 1925a (*dok. arch.*); 1925c (*dok. arch.*) i przypis 15 (poniżej).

¹⁴ Artykuł ten ma polsko-angielski tytuł „O teorii statystycznej promieniowania. – On the Statistical Theory of Radiation”, chociaż były to jedyne polskie słowa w całym artykule napisanym w języku angielskim.

analogiczne przykłady jak zrobił to Landé, wskazując odpowiednie strony z artykułu w wersji angielskiej (Natanson 1911a)¹⁵.

Ponadto zdaniem Natansona oryginalnym pomysłem Landégo była idea losowej wektorowej superpozycji kwantów światła, ale pomysł ten należy jeszcze rozwinąć w oparciu o prace Lorda Rayleigha (1871/[1899a](#); 1880/[1899b](#); 1884, § 42a; 1888/[1902](#); 1899/[1903](#)).¹⁶

Natanson w liście tym dodał jeszcze dwa ważne komentarze, pierwszy dotyczący problemem pierwszeństwa – Natanson uważał to za trywialny problem, któremu nie warto poświęcać czasu, i drugi dotyczący rozumienia idei nieodróżnialności cząstek kwantowych – zdaniem Natansona czytelnicy jego artykułu nie zrozumieli luki w probabilistycznym podejściu Plancka¹⁷.

¹⁵ Polski przekład zob. Dodatek 2; niemiecki oryginalny listu, jego transkrypcję oraz angielskie tłumaczenie zob. Kokowski [2021](#), Appendix 2.

¹⁶ Inne uwagi krytyczne formułował pod adresem tej idei Erwin Schrödinger w liście z 3 listopada 1925 r. do Alberta Einsteina (zob. Schrödinger 1925b (*dok. arch.*) [original](#) (s. 182), [tłumaczenie ang.](#) (s. 121); Einstein 2018, doc. 101, ss. 182–183; Mehra, Rechenberg [1987](#), s. 418) i 16 listopada 1925 r. do Landégo (zob. Raman, Forman 1969, s. 313).

Schrödinger, Erwin 1925b (*dok. arch.*) [original](#) (s. 182), [tłumaczenie ang.](#) (s. 121): “Currently I am exchanging letters with Landé about his quantum interferences (*Zeitschrift für Phys[ik]*, 33, p. 571) (= Landé 1925). The idea seems to me to be very interesting but not properly thought through. How is Planck’s (instead of Wien’s) radiation law supposed to result if the individual quanta are distributed throughout the cells, as if they did the interference independently and only retroactively, inside their cells, but only such that the mean energy of a larger number of cells, each containing j quanta (of the same kind), is not altered by the interference? Landé’s response is: Well, it is not the energy that is altered, but the entropy it is supposed to be judged from the resulting content of the individual cells. Very well. But the entropy here only plays the role of a measure of probability. Consequently, if the probability is supposed to be judged from the resulting cell content, well, then the quanta will not be distributed quasi independently throughout the cells and the whole advantage of L’s conceptual approach, which, of course, is supposed to be an explanation for the strange preference of quanta to “squat together,” [...] seems to me to be lost. – Two other objections are aimed at the faulty application of the formulas (which only apply with large numbers) to very small numbers, and are less meaningful in principle than the first objection, if it is valid.”

Einstein po raz pierwszy użył wyrażenia „Boseschen Statistik” („statystyka Bosego”) i „klassischen Statistik” („klasyczna statystyka”) w liście do Schrödingera z 28 lutego 1925 r. – zob. Einstein, Albert 1925 (*dok. arch.*) – niem. oryg. (Einstein 2015a, Doc. [446](#)); ang. przekład (2015b, Doc. [446](#)); fakt ten odnotowała Daniela Monaldi ([2019](#), s. 328).

¹⁷ Natanson miał rację w kwestii nieodróżnialności cząstek kwantowych, gdyż przyjęto ją traktować na gruncie mechaniki kwantowej jako niewyjaśnialny dalej po-

4. Komentarz z perspektywy metodologii historii fizyki

W wspomnianych powyżej artykułach Landé analizował model Bosego, a Natanson model Plancka;¹⁸ natomiast w liście skierowanym do Landégo Natanson zwrócił uwagę, że własności kombinatoryczne i termodynamiczne modelu Bosego, włącznie z wyjaśnieniem zagadnienia *nieodróżnialności kwantów światła*, zostały już wcześniej rozpoznane w modelu Plancka, co zrobił właśnie Natanson w swoim artykule (1911a/1911c), w którym pokazał, że możemy wyprowadzić rozkład Plancka energii promieniowania ciała doskonale czarnego:

jeśli przyjmiemy za pewnik, że w procesie oszacowania prawdopodobieństw nośniki energii można traktować jako rozróżnialne i że jednostki energii, będąc pod każdym względem dokładnie takie same, nie mogą być traktowane w ten sposób (tłum. – M.K.).

unless we take for granted that, in the process of estimating probabilities, the receptacles of energy *can* be treated

stulat – zob. np. Dirac [1926](#), ss. 662, 667–673; [1927](#), s. 12; 1930, ss. 198, 201, 208, 219–220; Heisenberg [1926](#), ss. 422–424; 1927; Wigner 1927a; 1927b; Pauli [1940](#), s. 718. W wspomnianym artykule Dirac ([1926](#), s. 673), jego autor błędnie wyprowadził wzór na rozkład energii molekul: wzór różnił się znakiem od obowiązującego na gruncie teorii Bosego-Einsteina, opartej na statystyce Bosego-Einsteina, którą Dirac określał mianem teorii Einsteina-Bosego; błąd ten powielił później G.E. Uhlenbeck i P. Ehrenfest 1926 (*dok. arch.*), co zauważył Einstein [1926](#) (*dok. arch.*).

Zob. też: Sudarshan, Mehra 1970 (o klasycznej mechanice statystycznej identycznych cząstek i kwantowych efektach); Mehra, Rechenberg 1982/2001 (o związku symetrii funkcji falowej i kwantowymi statystykami), ss. 757–768 (wyjaśnienie błędu Diraca: ss. 765–766); Mehra 2001, ss. 622–633 (wyjaśnienie błędu Diraca: ss. 632–633); Fraassen [1998](#), szczególnie ss. 75–76 (postulat niezmienniczości permutacji), ss. 79–82 (tożsamość bozonów); ss. 82–86 (teoretyczna unifikacja różnych statystyk); ss. 86–88 (kauzalność i korelacje).

Obecnie badacze dostrzegają ograniczenia przyjętego poglądu na temat identycznych cząstek w mechanice kwantowej – zob. np. Dieks [2020](#); Spalek [2020](#). Fakt ten nie jest jednak zaskakujący w świetle istnienia obszarów granicznych teorii określonych przez granicę parametru korespondującego w kontekście hipotetyczno-dedukcyjnej metody myślenia korespondującego (Kokowskiego).

¹⁸ W sensie epistemologicznym każdy matematyczno-fizyczny model jest matematyczno-fizyczną teorią. Zwyczajowo jednak w fizyce termin „model” rezerwowany jest do nierozbudowanych teorii – zob. Bailer-Jones 2009, ss. 1–46; 81–105.

as distinguishable and that the energy-units, being in all respects precisely alike, *cannot* be so treated (Natanson 1911a, s. 139).¹⁹

wenn wir voraussetzen, daß bei dem Prozeß der Wahrscheinlichkeitsberechnung die Energiehalter als identifizierbar behandelt werden können, und daß die Energieeinheiten, die in jeder Hinsicht vollkommen gleich sind, nicht als identifizierbar behandelt werden können (Natanson 1911c, s. 602).²⁰

¹⁹ Klaus Hentschel (2018, s. 2012), który – niezgodnie ze stanem faktycznym – uważał, że artykuł Natansona w *Bulletin International de L'Academie des Sciences de Cracovie* ukazał się w języku polskim (a faktycznie ukazał się w języku angielskim), podał własne angielskie tłumaczenie tego cytatu z niemieckiej wersji artykułu Natansona: „if during the process of calculating the probability we presume that it is possible to treat the receptacles of energy as identifiable and that it is not possible to treat the units of energy, which are the same in every respect, as identifiable” (Hentschel 2018, s. 82).

²⁰ Według autora artykułu nie ulega wątpliwości, że Natanson przed Ehrenfestem zrozumiał zasadę nieodróżnialności „elementów energii” (rozumianych jako rachunkowe fikcje czy byty empiryczne – zob. Dodatek 3. Świadczą o tym: a) artykuł Natansona w wersji angielskiej (odczytany na posiedzeniu Wydziału 6 marca 1911 r.; opublikowany około 10 kwietnia 1911) i w wersji niemieckiej (otrzymany: 29 kwietnia 1911; opublikowany: 15 sierpnia 1911); b) notatki Ehrenfesta od wiosny 1911 r. (przeoczył to spostrzeżenie Navarro, Pérez 2004, ss. 118–124).

Ehrenfest znalazł pracę Natansona: sam Ehrenfest wypowiadał się o niej w liście z 16 października 1911 r. do Sommerfelda (zob. Kokowski 2019, ss. 370–371, przyp. 66); cytował ją w swoich artykułach uczeń Ehrenfesta G. Krutkow (1914a; 1914b), cytował te prace Krutkowa także sam Ehrenfest (Ehrenfest 1911; 1925 / 2016, s. 3, przyp. 6; Ehrenfest, Kamerlingh-Onnes 1915a/1915b) i polecał je innym fizykom: dowiedział się o nich w ten sposób np. Hendrik Antoon Lorentz – zob. Kokowski 2019, ss. 372–374, przyp. 69–74. Tym niemniej Ehrenfest – co jest naganne – konsekwentnie pomijał w swoich publikacjach artykuły Natansona (Ehrenfest 1911; Ehrenfest, Kamerlingh-Onnes 1915a/1915b; Ehrenfest 1925 / 2016, s. 3, przyp. 6), choć są one od nich zależne.

Planck, podczas I Kongresu Solvaya, który odbywał się w Brukseli w dniach od 30 października do 3 listopada w 1911 r., (Planck 1912, s. 104 / 1958, t. 2, s. 277) odniósł się pozytywnie do wskazanego przez Natansona istnienia dwuznaczności rozkładu elementów energii i dlatego zmienił wyprowadzenie wzoru na rozkład energii: „This calculation is completely unambiguous, and nothing is left of the indetermination recently pointed out by L. Natanson” (cytowane przez: Darrigol 1991, s. 254). Powodem takiego wniosku Plancka była jego wiara w definicję kompleksji (complexions)

Trzeba tu wyraźnie zaznaczyć trzy kwestie:

1) W analizach prawa Plancka Natanson podążał śladem Boltzmanna.²¹

Boltzmann, która miała usunąć tę dwuznaczność (por. Darrigol 1988, s. 52). Dodam, że Planck nie miał racji: nowe wyprowadzenie dalej było ułomne (por. Darrigol 1991, ss. 253–254).

Albert Einstein ani nie cytował publikacji Natansona, ani nie dyskutował ich w swojej korespondencji – zob. Einstein 1916; 1917; 1924; 1925; 1930; Einstein, Ehrenfest 1923; Einstein 1987–2018; Pérez, Sauer 2010. Tym niemniej Einstein miał co najmniej dwukrotnie okazję natknąć się na tę publikację Natansona: po raz pierwszy podczas lub po I Kongresie Solvaya w 1911 r., gdyż cytował ją Planck 1912, s. 104, fn. 1 – zob. Kokowski 2019, s. 372; po raz drugi z lektury, wspomnianego w liście Otto Halperna do Einsteina z 26 sierpnia 1924 r. (Halpern 1924 (*dok. arch.*)), artykułu Krutkova (1914a), krytykującego wyprowadzenie prawa promieniowania Plancka z założenia Bosego o niezależności kwantów światła i cytującego artykuły Natansona (1911c) i Ehrenfesta (1911) – zob. Kokowski 2019, s. 378, przyp. 86.

²¹ Natanson (1911a, ss. 134–138; 1911c, ss. 659–661; 1913, ss. 54–61) wzorem Boltzmann (1868; 1877) przedstawił opisy analizy konfiguracji układu statystycznego. Szczegółowo i wieloaspektowo wyjaśnił związane z tym kwestie Alexander Bach w wielu ważnych publikacjach – zob. Bach, Blank, Franck 1985; Bach 1985; 1987; 1988a; 1988b; 1990a; 1990b; 1990c; 1991; 1997, ss. 137–139; zob. też Enders 2016, ss. 2–3.

Puktem wyjścia jest odróżnienie trzech poziomów analizy układu statystycznego.

Podstawowy opis określają zmienne losowe konfiguracji: układ złożony z N atomów obdarzonych elementami / jednostkami energii; konkretny atom obdarzony jest konkretnymi elementami / jednostkami energii (Natansonowskie „rozemieszczenie energii” / „mode of association”).

Drugi poziom określają *liczby zajętości* („occupation numbers”) zmiennych losowych: liczby elementów / jednostek energii w poszczególnych (ponumerowanych) atomach: to Natansonowski „rozkład energii” / „mode of collocation”, „Anordnungsart”; jeden więz (równanie warunkowe) na całkowitą liczbę jednostek energii.

Trzeci poziom opisu określają *liczby obłożenia* („occupancy numbers”) zmiennych losowych: liczby atomów, które posiadają kolejne liczby elementów / jednostek energii (0, 1, 2, ...); to Natansonowski „rozdział energii”, „mode of distribution”, „Verteilungsart” z dwoma więzami (równaniami warunkowymi) na liczbę atomów i na całkowitą liczbę elementów / jednostek energii.

Dla przypadku, gdy umiemy odróżnić indywidualne atomy, a nie umiemy odróżnić jednostek energii prawdopodobieństwo rozdziału (zależnego od *liczb obłożenia*) określa miara prawdopodobieństwa Boltzmann $P = \frac{[(N-1)!n!N!]}{[(N+n-1)!N_0!N_1! \dots N_p!]}$, natomiast dla przypadku, gdy umiemy odróżnić zarówno indywidualne atomy, jak i jednostki energii miara $P = \frac{[N!n!]}{[N^0 N_0!N_1! \dots N_p! 0!^{N_0} 1!^{N_1} \dots p!^{N_p}]}$. Uzasadnieniem wyboru miary Boltzmann jest jej związek z entropią (Natanson 1911a, ss. 134–138; 1911c, ss. 659–661; 1913, ss. 54–61).

2) W artykule z 1911 r. Natanson nie mówił o kwantach światła („Lichtquanta”) – to termin wprowadzony w 1905 r. przez Einsteina,²² lecz o elementach energii („energy-units”, „Energieelemente”) – to termin wprowadzony w 1900 r. do analizy prawa promieniowania światła przez Plancka w nawiązaniu do Boltzmann (1872);²³ Natanson pierwotnie nie określił statusu ontycznego elementów energii; z nawiązania przez Natansona do Boltzmann (1872, s. 275 / [1909a](#) s. 316) można było jednak sądzić, iż były one fikcjami matematycznymi; w późniejszych jednak publikacjach z lat 1911–1924 Natanson szczegółowo wyjaśnił, że nie są one fikcjami matematycznymi, choć czasami wyrażał pewne wątpliwości co do tego rozstrzygnięcia – zob. Dodatek 3;

3) w liście do Landégo z 14 listopada 1925 r. Natanson poruszył nowy wątek: wskazał korespondujące elementy tych modeli: „komórka przestrzeni fazowej” to odpowiednik „nośnika energii” („receptacle of energy”, „Energiehälter”), a „element energii” / „jednostka energii”, utożsamiona zostaje z jednostką materialną posiadającą dyskretne wartości energii²⁴ – kwantem światła.²⁵

²² Zob. *Einstein* [1905](#); *Wikipedia* [2021](#).

²³ Planck 1900, s. 239: “The distribution of energy over each type of resonator must now be considered, first, the distribution of the energy E over the N resonators with frequency ν . If E is regarded as infinitely divisible, an infinite number of different distributions is possible. We, however, consider – and this is the essential point – E to be composed of a determinate number of equal finite parts and employ in their determination the natural constant $h = 6.55 \times 10^{-27}$ erg sec. This constant, multiplied by the frequency, ν , of the resonator yields the energy element ϵ in ergs, and dividing E by $h\nu$, we obtain the number P, of energy elements to be distributed over the N resonators” (cyt. za: Kuhn 1978, ss. 104–105).

²⁴ Zdaniem Saundersa (2020, s. 48) Natansonowskie elementy energii są jedynie matematycznymi fikcjami i nigdzie ich nie utożsamił z kwantami: „He nowhere explicitly identified his energy-units as light quanta. They were abstract from the beginning (he did not so much as mention the concept of frequency)”. To błędne tezy. Natanson nie wypowiedział się na ten temat w swoich syntetycznie napisanych artykułach o teorii promieniowania Plancka (1911a/1919c), ale obszernie wyjaśnił te kwestie w innych swoich publikacjach – zob. Dodatek 3.

²⁵ Dotychczasowi badacze, nieznając listu Natansona do Landégo, dokonywali niezależnych interpretacji związków łączących rozważania Natansona i Bosego, tzn. statystykę Boltzmann-Plancka-Natansona ze statystyką Bosego. Wśród nich wymienić można tu analizy dokonane przez takich badaczy jak: Artur Kastler (1983, s. 616); John Stachel (2000 / 2002, ss. 438–439); Silvio Bergia (1987, s. 344); Jagdish Mehra i Helmut Rechenberg (2001, s. [559](#)); Daniela Monaldi (2009, 2019); Simon Saunders ([2020](#), s. 49)

Bose i Einstein w latach 1924–1925 przeoczyli zagadnienie nieodróżnialności obiektów kwantowych, *gdyż nie rozumieli wtedy subtelności rozważań* Natansona z 1911 r.²⁶

Jednak wbrew tezie Friedricha Hunda z 1967 r.²⁷ Natanson nigdy nie głosił, że „sformułował statystykę Bosego kwantów światła przed Bose”,²⁸ gdyż nie podał w 1911 r. kwantowego wyprowadzenia gęstości stanów energii, które przedstawił dopiero Bose w 1924 r.²⁹ i w latach 1911–1923 miał pewne wątpliwości co do realności kwantów światła, które jednak w latach 1924–1925 znacznie ograniczył (zob. Dodatek 3).

Trafna jest natomiast nadal teza, iż Natanson jako pierwszy twierdził, że aby wyprowadzić prawo Plancka należy przyjąć zasadę nieodróżnialności obiektów kwantowych (*faktycznie* jednostek energii, elementów energii albo kwantów światła, zob. Dodatek 3). Głosili tę tezę w tej czy innej formie m.in. Max Jammer (1966, s. 51), Friedrich Hund (1967/1974; 1975; 1980) oraz Artur Kestler (1983) i inni³⁰.

5. Zapomniany list od Alfreda Landégo do Władysława Natansona

W tomie 10 korespondencji Władysława Natansona zgromadzonej w Bibliotece Jagiellońskiej i ss.nej online znajduje się przeoczony dotąd przez historyków fizyki list Alfreda Landégo do Władysława Natansona, wysłany 18 listopada 1925 r. z Tybingi do Krakowa i będący odpowiedzią na list Natansona z 14 listopada 1925 r.

W tym napisanym po niemiecku liście Landé: a) podkreślił, że niestety nie znalazł wcześniej artykułu Natansona z 1911 r. (mimo iż artykuł

oraz Alexander Bach (zob. prace wskazane w przyp. 16). Interpretacje te są krytycznie omówione w Dodatku 5.

²⁶ Por. Kojevnikov [2002](#), ss. 201–202; Pérez, Sauer [2010](#), ss. 12–16; Kokowski [2019](#), s. 381.

²⁷ Por. Friedrich Hund (1967, ss. 25–26, 134, 153–154; (tłum. ang.) 1974, ss. 30, 145; (tłum. ros.) 1980, ss. 26, 123): “Die Abzählung, die Natanson verdeutlicht hat, ist genau die, die Bose später auf Lichtquanten anwandte und die man jetzt Bose-Statistik nennt” (Hund 1967, s. 26); “This method of counting events, that Natanson made, is exactly the one, which Bose later made for light quanta, and is now called Bose statistics” (Hund 1974, s. 30) – cytowane w: Kokowski [2019](#), s. 348.

²⁸ Autor artykułu przez statystykę rozumie tutaj model statystyczny zjawisk.

²⁹ Por. Kokowski [2019](#), ss. 395–396.

³⁰ Zob. Kokowski [2019](#), ss. 348–357.

był opublikowany po angielsku w *Bulletin International de l'Academie des Sciences de Cracovie...* i po niemiecku w *Physikalischen Zeitschrift* – M.K.), b) wyraził uznanie dla fundamentalnych dokonań Natansona ujawniających – jak to ujął – dwuznaczność teorii Plancka niezauważoną przez setki innych fizyków teoretyków oraz c) złożył obietnicę, że będzie cytował artykuł Natansona przy nadarzającej się okazji.

Poniżej podaję treść tego listu w polskim przekładzie:

Tybinga, 18 listopada 1925 r.

Drogi Panie Kolego!

Bardzo dziękuję za list i wzmiankę o Pańskich świetnych badaniach z 1911 r. Jestem właśnie po lekturze Pańskiego opracowania i szczerze żałuję, że nie było mi wcześniej znana.

Pańskie jasne i dogłębnie krytyczne oraz przemyślane rozważania mają fundamentalne znaczenie dla każdego teoretyka kwantowego i jest to doprawdy dziwne, że żaden z setek naszych teoretyków poza Panem nie natknął się jeszcze na dwuznaczność teorii Plancka.

Z tego powodu z wielką chęcią wykorzystam najbliższą okazję, aby wspomnieć o Pańskiej ważnej i fundamentalnej pracy. Prześlę Panu w tym samym czasie przedruki.

Z wyrazami głębokiego szacunku, szczerze Panu oddany,
A. Landé³¹

6. Artykuł Gerlacha i Landégo (1926) oraz monografia Landégo (1926, II wyd.)

27 stycznia 1926 r. Walther Gerlach i Alfred Landé przesłali do *Zeitschrift für Physik* artykuł pt. „Ein Experiment über Kohärenzfähigkeit von Licht”, który ukazał się już w marcu 1926 r. (vol. 34, ss. 169–173). W artykule tym autorzy wspomnieli artykuł Natansona z 1911 r. w następującym kontekście:

Z punktu widzenia najbardziej rygorystycznej teorii kwantowej światła, interferencji nie można w ogóle zrozumieć¹⁾. *Jednak prawo Plancka promieniowania w podobszarze*

³¹ Niemiecki oryginał listu, transkrypcja listu oraz angielski przekład – zob. Kokowski 2021, Appendix 3.

*Rayleigha-Jeansa już prowadzi do odrzucenia rygorystycznej koncepcji kwantowego światła*²⁾. Jednak złagodzenie teorii kwantowej światła dostarcza tu rady, a mianowicie wymóg, aby kwanty światła należące do tej samej wiązki elementarnej nie łączyły swoich energii addytywnie, ale raczej składały się³⁾ po przypisaniu im faz po polaryzacji. Jednak przy tym dodatkowym założeniu zjawiska interferencji nie są jeszcze wystarczające; ponieważ części wiązki światła mogą również interferować, jeśli wiązka światła jest tak fioletowa lub tak słaba, że należy do zakresu widmowego Wiena. W tym drugim przypadku jednak większość elementarnych wiązek kwantów światła jest pustych i tylko w wyjątkowych przypadkach wiązka przenosi pojedynczy kwant światła, a obłożenie kilkoma kwantami światła jest całkowicie pomijalne. Zdolność światła Wiena do interferencji wymaga zatem superpozycji ułamków kwantu światła”³² (tłumaczenie, kursywa – M.K.).

¹⁾ Por. np. Landé 1926b, przyp. 2, s. 322.

²⁾ Natanson 1911c.

³⁾ Landé 1925.

W taki sam bardzo zwięzły sposób Landé zacytował pracę Natansona jeszcze w jednej swojej publikacji – w Bibliografii II wydania monografii *Die neuere Entwicklung der Quantentheorie* (1926b, s. 169, no. 45).

Tak więc Landé zrealizował złożoną obietnicę Natansonowi w liście 18 listopada 1925 r., ale zrobił to w bardzo zdawkowy i enigmatyczny sposób, znacznie odbiegający od treści listu wysłanego do Natansona.³³

7. Konkluzje

W artykule tym udało się ustalić następujące niezbite ważne fakty:

- a) w 1926 r. znani fizycy Walther Gerlach i Alfred Landé wspomnieli co najmniej dwukrotnie w ich publikacjach dotyczących własności światła artykuł Natansona z 1911 r. (w wersji niemieckiej: 1911c);

³² Niemiecki oryginał zob. Gerlach, Lande 1926, p. 170 i Kokowski 2021.

³³ Autorowi artykułu nie są znane żadne dokumenty archiwalne, które wyjaśniłyby powód takiej decyzji i nie wdaje się w spekulacje na ten temat.

- b) stało się tak na skutek wymiany między Natansonem a Landé dwóch listów w języku niemieckim z 14 listopada 1925 r. i 18 listopada 1925 r. (po raz pierwszy tu opublikowanych wraz z przekładami na język angielski i język polski).

Jak wskazał Natanson w przesłanym liście z 14 listopada 1925 r., wyprowadzenie przez Landégo rozkładu Plancka, jest analogiczne do sposobu, który w 1911 r. przedstawił Natanson (oparte na podejściu Boltzmann'a: użyciu *liczby obłożenia* zmiennych losowych konfiguracji układu statystycznego złożonego z N atomów obdarzonych elementami / jednostkami energii).

Mimo iż w 1926 r. artykuł Natansona z 1911 r. (w wersji niemieckiej) został dwukrotnie zacytowany przez Walthera Gerlacha i Alfreda Landégo nie wzbudził – według mojej dotychczasowej wiedzy – jednak zainteresowania w *publikacjach naukowych* i został zapomniany aż do ukazania się trzech monografii z historii fizyki: Edmunda Taylora Whithakera (1953), Maxa Jammera (1966, s. 51) oraz szczególnie Friedricha Hunda (1967/1974, 1975, 1980).³⁴

³⁴ Zob. odpowiednio Kokowski 2019, ss. 399–400 (o Whithakerze) i ss. 346–347 (o Hundzie). W artykule tym przeoczono uwagi Jammera na temat Natansona. Według Jammera jednocześnie dwóch badaczy Ehrenfest (1911) i Natanson (1911a / 1911c) niezależnie dostrzegło, że hipoteza nieodziaływujących kwantów Einsteina nie prowadzi do prawa promieniowania Plancka, lecz do prawa Wiena. Jammer *jako pierwszy* streścił na czym polegało podejście kombinatoryczne Natansona:

“In his analysis of the precise assumptions underlying Planck’s combinatorial procedure in which P energy elements ϵ were distributed among N «receptacles of energy» so that N_j receptacles each contain j energy elements, subject to the restrictions $\sum N_j = N$ and $\sum jN_j = P$, Natanson called the correlation of $j\epsilon$ with N_j , that is, sorting the receptacles according to their energy content and specifying the number of receptacles which have equal energy content, a «mode of distribution,» in setting up a «mode of distribution,» Natanson emphasized, no account is taken of a possible «identifiability» or distinguishability, as we would say today, of receptacles or of energy elements. However, as soon as the former are regarded as individually identifiable, every given «mode of distribution» ramifies into a number of «modes of collocation» which specifies the number of energy elements in each individual receptacle. Finally, if the energy elements are also considered as identifiable, each «mode of collocation» splits into a number of «modes of association» which associates individual energy elements with individual receptacles. Natanson then pointed out that the thermodynamic probability of a given «mode of distribution» depends notably on whether all “modes of association» or all «modes of collocation» are regarded as equally probable, and he showed that Planck, in contrast to Einstein, adopted the latter alternative” (Jammer 1966, s. 51).

Dodatek 1.

Wprowadzenie metodologiczno-socjologiczne

Każda teoria matematyczno-fizyczna tworzona jest zbiorowym wysiłkiem społeczności naukowej w wyniku złożonych interakcji dotyczących analizy zagadnień matematyczno-fizycznych, sztuki prowadzenia badań naukowych, stylów naukowych i stylów myślenia (Fleck, Crombie) oraz sztuki argumentacji, m.in. stylów rozumowań (Hacking), i sztuki perswazji.

Interakcje te doprowadziły do wyłonienia się już w czasach starożytnych ogólnej metody nauk ścisłych, która w terminologii autora artykułu określana jest mianem *hipotetyczno-dedukcyjnej metody myślenia korespondencyjnego*.³⁵ Stosowanie tej metody określa styl matematyczno-fizyczny badań naukowych wraz ze stylem myślenia i stylem rozumowań.

Dzięki stosowaniu tej metody tworzone są matematyczno-fizyczne teorie zjawisk. Postulowane teorie są tak konstruowane, by być wewnętrznie spójne i by „zachowywać zjawiska”, tzn. by predykcje teorii były zgodne z pomiarami empirycznymi.³⁶ W toku rozwoju nauki teorie są stale przekształcane i uogólniane (manifestują się tu mechanizmy ewolucyjno-rewolucyjne), zachowując w ten sposób pamięć o wcześniejszych teoriach (ich składowych teoretyczno-empirycznych).

W powtarzającym się stale w dziejach nauk matematyczno-fizycznych procesie reinterpretacji i uogólniania istniejących teorii ważną rolę pełnią:

- a) parametr korespondencyjny,
- b) postulat korespondencji teorii,

Jammer sformułował mocną konkluzję: *“It was in Natanson’s analysis of Planck’s statistical procedure that the problem of the distinguishability of elementary entities was raised for the first time”* (tamże; kursywa – M.K.).

Max Jammer (1966) mylił się jednak co do jednoczesności osiągnięć Ehrenfesta i Natansona, pierwszeństwo należy tu do Natansona – zob. powyżej przyp. 15.

³⁵ Od czasów Thomasa S. Kuhna (1962) i Paula Feyerabenda (1975) filozofowie nauki i socjologowie wiedzy naukowej powszechnie negują istnienie metody naukowej. To poważne nieporozumienie – zob. Kokowski 1996, ss. 10–25; 2004, ss. 59–62; 2012; 2015.

³⁶ To znane zagadnienia historii i filozofii nauk matematyczno-fizycznych, wywodzące się z tradycji Platona (*Timajos*), Ptolemeusza (*Almagest*) i Kopernika (*Commentariolus, De revolutionibus*) – zob. Kokowski 2004, pp. 92–95, 157–162 – oraz Einsteina – zob. Holton 1979; Howard, Giovanelli 2019.

- c) zasada korespondencji teorii,
- d) eksperyment myślowy ze zmianą wartości parametru korespondencyjnego;
- e) obszar graniczny teorii wyznaczonego przez granicę parametru korespondującego (zwykle 0 lub ∞).³⁷

W każdej teorii matematyczno-fizycznej można wyróżnić trzy warstwy semiotyczne:

- warstwę matematyczną: określony język matematyczny (warstwa ta określa syntaktykę teorii);
- warstwę quasi-bytów: hipotetyczne byty fizyczne, które służą wyjaśnianiu zjawisk; traktuje się je albo jako rachunkowe fikcje, albo byty empiryczne, co uzależnione jest od warstwy empirycznej teorii, wskazanej poniżej (warstwa ta wspólnie z warstwą empiryczną określa semantykę teorii);
- warstwę empiryczną: wyznaczoną przez zasady korespondencyjne, które albo łączą nową teorię ze starymi teoriami, albo bezpośrednio prowadzą do pomiaru parametrów nowej teorii (warstwa ta wspólnie z warstwą quasi-bytów określa semantykę teorii).³⁸

Warstwy te nie muszą być wcale jednolite. Przy pomocy szczegółowych badań historycznych – swoistej archeologii wiedzy naukowej – możemy ujawnić w badanych teoriach istnienie ukrytych podwarstw semiotycznych dziedziczonych po poprzednich teoriach.

W szczególności stosowane konwencje nazewnicze praw, reguł oraz teorii są często bardzo złudne, skrywając faktycznych współautorów takich odkryć. By temu zaradzić, należy po pierwsze pamiętać o tej niebezpiecznej cesze konwencji i pod drugie uzupełniać listę najważniejszych współautorów takich odkryć (Kokowski 2019, s. 398). Tym niemniej każda konwencjonalna nazwa tego typu zawsze pozostaje tylko konwencją i jako taka nie ujawnia kompletu faktycznych współautorów odkryć.

³⁷ Zob. Kokowski 1996, ss. 10–25; 2004, ss. 59–62; 2012; 2015.

³⁸ *Ibidem*; ponadto zob. Badino 2015a; 2016 (rozważania o strukturze teorii i procesie rekonfiguracji metod, pytań badawczych oraz ram epistemologicznych historiografii mechaniki kwantowej); Hentschel 2006; 2018 (rozważania na temat historii, modeli mentalnych oraz warstw semantycznych pojęcia „kwantu światła”); Hacking 1982; 1990; 1992a; 1992b; 2002; 2012; Gavroglu 1990; Pickering 1992; Elwick 2012; Monaldi 2019 (rozważania na temat statystycznego stylu rozumowań; praktyk i kultur badawczych; warstw historii).

W rozwoju nauki wydarzają się tzw. (r)ewolucje naukowe (terminologia M. Kokowskiego), będące efektem zarówno procesów ewolucyjnych, jak i procesów rewolucyjnych, gdyż „ewolucje naukowe” i „rewolucje naukowe” to opisy komplementarne rozwoju nauki (Kokowski 2015).

Dodatek 2.

Polski przekład listu od Władysława Natansona do Alfreda Landé (14 November 1925)

ul. Studencka 3
Kraków (Polska)
14 listopada 1925 r.

Drogi Panie Kolego,

Pozwólcie mi wyrazić, drogi Kolego, moją radość i zainteresowanie, z jakimi czytam Pańską piękną i ważną rozprawę „Lichtquanten und Kohärenz” [„Kwanty światła i koherencja”] w *Zeit[schri]ft für Physik* tom 33 (1925), s. 571. Jeśli jesteśmy zmuszeni przypisać kwantom światła polaryzację i fazę, wówczas $\sqrt{\varepsilon} \cdot e^{ip}$ jest przypadkowe.

Składamy wektory, więc jesteśmy daleko od pierwotnych idei kwantowych, powróciliśmy do teorii falowania, choć nie do klasycznej teorii. I to jest podstawowe stwierdzenie. Bardzo przekonująco pokazał Pan na s. 573, że rozkład (2) Bosego (jak i Plancka!) jest a priori nieakceptowalny.

Już w 1911 r. podałem bardzo podobne rozważania w rozprawie „O statystycznej teorii promieniowania”, opublikowanej w *Biuletynie Międzynarodowym Polskiej Akademii w Krakowie* [de facto w *Biuletynie Międzynarodowym Akademii Umiejętności w Krakowie*, gdyż w 1919 roku dokonano zmiany nazwy „Akademia Umiejętności w Krakowie” na „Polska Akademia Umiejętności”] w marcu 1911, ss. 134–148 i w niemieckim tłumaczeniu, zamówionym przez pana Maxa Ihle’a i wydrukowanym *in extenso* w *Physikalischen Zeitschrift*, Lipsk 1911, tom XII, ss. 659–666. Przesyłam Panu odbitkę tej pracy z września 1911 r.

Jeśli porówna Pan swoją s. 573 z moimi ss. 135, 137–138, od razu się Pan przekona, że kierował nami ten sam pomysł. Pańskie „dystrybucje” („Verteilungen”) odpowiadają moim „kolokacjom”, Pańska „możliwości realizacji” („Realisierungsmöglichkeiten”) – moim „asocjacjom”.

Prosty przykład Plancka, 4 kwanty w 3 komórkach, również znajduje się u mnie (§ 3) (ss. 137–138). Na ss. 138–140 (§4) doszedłem do wniosku, że jeśli \underline{P} (moja SL (10) s. 137), a nie \underline{P} ((11) s. 137) jest najważniejszą miarą prawdopodobieństwa, to wynika z tego, że kwanty są „nierozróżnialne” między sobą (w przeciwieństwie do komórek, które można odróżnić). – Pańskie wielkości p_0, p_1, \dots są proporcjonalne do moich N_0, N_1, N_2, \dots . Pańskie warunki (9) są moimi warunkami (I) i (II) w § 1; Pański warunek (8) jest u mnie jako warunek (6), s. 136 itd. W § 5 (ss. 140–141) przyjąłem już $\log \Delta w = \text{Max}$ i znalazłem rozkład $p_j = B e^{-j\epsilon}$ (10) s. 575 w (III), s. 141. Pańskie równanie (10'') jest także identyczne z moim (10), s. 148; omówiłem przypadek $\epsilon \ll kT$ (patrz § 7, ss. 141–142 i § 16, ss. 147–148).

Nigdy nie myślałem o wektorowej – losowej superpozycji kwantów, które stanowi rdzeń Pana badań (i wydaje mi się, że to główny pomysł). W związku z tym, że jak wierzę, to owocny pomysł, proszę pozwolić, że skieruję Pana do dzieł lorda Rayleigha (*Proc. Lond. Math. Soc.* III, 1871; *Phil. Mag.* X, 1880; *Enc. Brit.* 24, 1888; *Theory of Sounds* I, § 42a, 2. wydanie, 1884; *Phil. Mag.* 47, 1899; *Scientific Papers* I, ss. 76, 491; III, s. 52; IV, s. 370), który na długo przed Markoffem zajął się tym samym problemem i rozwiązał go wszechstronnie.

Kwestie personalne i roszczenia o pierwszeństwo są na ogół trywialne, a nawet nieznośne, i jestem daleko od tego. Chcę Pana o czymś zapewnić. Otóż zawsze wydawało mi się, że mój sprzeciw wobec logicznego uzasadnienia idei probabilistycznego podejścia Plancka nie został uwzględniony, [gdyż] może nie został zrozumiany. Dziś szczególnie cieszę się, że niezależnie ode mnie, dogłębnie interpretuje Pan te same idee.

Może mogę Pana poprosić, drogi Kolego, o wspomnienie w kilku słowach przy jakiejś okazji mojej pracy z 1911 r. Byłbym także bardzo wdzięczny za przesłanie (jeśli to możliwe) odbitek z wrześnieowego numeru *Z[eitschrift f. Physik* – mam do niego ss. dopiero wiele tygodni (a nawet miesięcy) po jego ukazaniu się.

Z wyrazami mojego szczególnego szacunku pozostaję
Panu oddany Władysław Natanson³⁹

³⁹ Niemiecki oryginał listu i jego transkrypcję oraz jego angielski przekład, zob. Kokowski 2021, Appendix 2.

Dodatek 3.

Spektrum stanowisk Władysława Natansona w kwestii statutu ontologicznego kwantów energii

Natanson wypowiedział się na tytułowy temat w latach 1911–1925 i formułował różne stanowiska. Dowodem na to są jego uwagi przedstawione w jego publikacjach: Natanson 1911a; 1911b (I wersja)/1912a (= odbitka 1911b); 1911c; 1912a; 1912b; 1913; 1923; 1924b (= II wersja 1911b)).

W swoich najbardziej znanych artykułach 1911a/1911c, a także 1912b Natanson pominął to zagadnienie. Można było stąd wywieść wnioski, że traktował elementy energii / jednostki energii jako fikcje rachunkowe, gdyż wspominał on, że tak traktował je Boltzmann w 1872 r.

Jednakże w referacie pt. „O promieniowaniu” wygłoszonym 19 lipca 1911 r. podczas XI Zjazdu Lekarzy i Przyrodników Polskich w Krakowie (18 – 22 lipca 1911 r.) Natanson (1911b/1912a) głosił jednoznaczny pogląd, że kwanty energii istnieją w rzeczywistości, bo przemawia za tym fizyka zjawisk gazowych i promieniowania światła (a konkretnie istnienie zasady korespondencji łączącej statystykę Boltzmann-Plancka-Natansona ze statystyką Maxwella-Boltzmann); kwanty energii nie są jednak niezmiennymi atomami:

Słyszymy niekiedy lub czytamy zdanie, według którego hipoteza skończonych jednostek energii jest pożyteczna, ponieważ pozwala obliczać prawdopodobieństwa rozmaitych rozdziałów energii i tem samym wskazuje pośród nich najprawdopodobniejszy. Gdyby powołanie jej na tem polegało wyłącznie, hipoteza jednostek byłaby w ostatecznej instancji tylko wybiegiem rachunku. Jednakże wydaje mi się, że ona bynajmniej nim nie jest. Jeśli przypuścimy, że jednostka energii staje się coraz *mniejsza* i dąży do zera, wówczas rozdział najprawdopodobniejszy nie staje się wcale mglisty i nieokreślony, lecz dąży do przejścia (przynajmniej co do istoty rzeczy) w klasyczny rozdział Maxwella, znany z Teorii Gazów. Planck w Teorii Promieniowania odszedł od Maxwell'owskiego typu rozdziału i przeczłwał się niemal w przeciwną krańcowość. Ażeby zrozumieć tę okoliczność, powinniśmy pamiętać o tem,

że, gdy *quanta*, są małe, liczba ich w danym układzie musi tem samym być znaczna.

[...] Stańmy teraz na stanowisku hipotezy elementarnych jednostek energii i powiedzmy zupełnie ogólnie: w Kinetycznej Teorii Gazów musimy przypuszczać, ażeby dojść do Maxwell'owskiego sposobu rozdziału energii, że stosunek liczby obecnych jednostek do liczby cząsteczek jest olbrzymi, że, biorąc rzeczy praktycznie, jest nieskończenie wielki; w Teorii Promieniowania, przeciwnie, stosunek n/N jest małym ułamkiem; formuła (1) artykułu X-go [to prawo rozkładu energii promieniowania Plancka] wypada w tem założeniu. W Teorii Gazów roztrząsamy zatem przypadek układu, *suto* uposażonego w energią; w Teorii Promieniowania, przeciwnie, widzimy, jakie wynikają następstwa, gdy układ jest *skąpo*, ubogo, zaopatrzony w energią. Mamy tutaj dwa skrajne i wprost przeciwne, a bardzo szczególne przypadki prawidłowości znacznie bardziej ogólnej, ale i bardziej zawilej. Ta prawidłowość, którą będziemy musieli nauczyć się posługiwać, stanowi niewątpliwie fundament przyszłej Teorii Kinetycznej wszelkich stanów skupienia Materii. Już dzisiaj widzimy początki Kinetycznej Teorii *Ciał Stałych*, którą Einstein, ze zwykłą śmiałością i z niemalem już powodzeniem, według analogicznych zarysów niedawno zaczął budować. Krótko możemy powiedzieć, że w owej Teorii panuje to, co leży na dnie prawa Plancka” (Natanson 1911b, ss. 158–159).

Istnieją elementarne *quanta*, czyli jednostki energii; tego nas uczą, w oświetleniu Rachunku Prawdopodobieństwa, fakta kardynalne w Dziedzinie Promieniowania. I ten rezultat opanowują natychmiast całe nasze myślenie (Natanson 1911b, s. 157).

Lecz czemuż jest „atom energii”? Czy podobna zrozumieć łączność, spójnię, niepodzielność pewne) określonej ilości energii? Same przez się nasuwają się podobne pytania. Gdybyśmy próbowali wyrazić (w sformułowaniu najbardziej ogólnem) istotną *treść* zdobyczy, którą wzbogaceni zostaliśmy przez Plancka teorią, czy nie moglibyśmy

powiedzieć: iż Planck w fundamentalnych faktach promieniowania wyczytał istnienie w Naturze pewnej *nieciągłości*. Ale *w czym* ta nieciągłość? Możemy wyobrażać ją sobie bezpośrednio w emisji i w absorbcji promieniowania, dokonywanej przez ostatnie cząstki materii; albo też, jak Planck przed niedawnym czasem okazał, możemy ją przenieść do samej tylko emisji. Powracając do Newtona, moglibyśmy przypuścić, że nieciągłość tkwi w przestrzennej naturze promieniowania, jak tego próbowali domyślać się niektórzy uczeni; albo może w strukturze powszechnego eteru. Zważywszy, że napotykamy nieciągłość w pewnym *pojęciu*, mianowicie w pojęciu energii, łatwo widzimy, że będziemy mogli ową nieciągłość niejako przesuwając do rozmaitych z kolei porządków myślenia; może umieścimy ją wreszcie w pojęciu czasu albo w pojęciach czystej geometrii; ale pozbyć się jej nie potrafimy żadnym sposobem.

Jeżeli tak jest, czy wogóle podobna dynamicznie albo elektromagnetycznie zrozumieć *quantum* energii? Dynamika i Elektromagnetyczna Teoria, przynajmniej w zwyczajnej, bieżącej postaci, operują pojęciami, które zawsze są ciągle; i jedna i druga, w klasycznej postaci, prowadzi do Zasady Ekwipartycji Energii; a ta, jak wiemy, jest zaprzeczeniem dzisiejszej, sprawdzonej formuły Promieniowania. Wikłamy się w sprzecznościach, gdy usiłujemy wyobrazić sobie *quanta* energii jako przesyłki, jakieś ładunki albo pociski energii, biegnące w zwykłej przestrzeni i w czasie, według zwyczajnych praw, które we wszystkim dopatrują się ciągłości. Mogliśmy byli przewidzieć to niepowodzenie. Krótko powiedzmy, że ciągly model, nieciągle jednostki energii jest *niemożliwy*. Ale zastanówmy się nad tem: czy jest nam naprawdę potrzebny? Pojęcie jednostek energii powinna być elementem naszego sposobu pojmowania Natury. Jeżeli okaże się, jak można przypuszczać, *nieodzownym* jego czynnikiem, tedy musi przeniknąć do całego naszego myślenia i przeobrazić to wszystko, co nie jest z nim dzisiaj zgodne i spójne (Natanson [1911b](#), ss. 159–160; wyróżnienie kursywą pochodzi od Natansona – M.K.).

Mimo takich jednoznacznych wypowiedzi, Natanson miał jednak wątpliwości czy ma rację w kwestii rozumienia kwantów. W 1913 r., komentując w rozprawie pt. „Zasady Teorii Promieniowania (Principes de la Théorie du Rayonnement)” wybór miary prawdopodobieństwa Boltzmanna P zamiast P , Natanson zacytował krytyczną uwagę polskiego fizyka Kamila Krafta (1873–1945):

Co tkwi na dnie tego faktu? czego można się z niego nauczyć? Jesteśmy jeszcze dalecy od posiadania odpowiedzi na te i inne pytania. Możliwe byłoby przypuszczać (uwagę tę uczynił Dr. K. Kraft), że fizyczne znaczenie pojęcia P oraz niepowodzenie P jest wskazówką istnienia w naturze molekularnych nieciągłości materii i nie-istnienia rzeczywitych „kwantów” czyli nieciągłości energii. Lecz powinniśmy wyznaczyć, że ta wskazówka jest dzisiaj jeszcze niejasna i wątpliwa (Natanson 1913, ss. 60–61).⁴⁰

Dziesięć lat później, czwartego kwietnia 1923 r., w przemówieniu na posiedzeniu inauguracyjnym pierwszego Zjazdu Fizyków i Chemików Polskich w Warszawie, Natanson mając na względzie a) *nieistnienie zuniifikowanej teorii zjawisk optycznych* i b) istnienie sprzeczności opisów zjawisk optycznych oferowanych przez optykę falową i (nową) optykę kwantową, Natanson dostrzegł poważne ograniczenia postulowanych dotąd hipotetycznych bytów teorii:

Nie dowierzamy zatem istnieniu fal prawidłowych i prostych; odmówmy również ufności obiektywnemu bytowi kwantowych atomów. Niezgodność undulacyjnej i kwantowej Optyki świadczy tylko o tym, że i jedna i druga nauka, podchwyciwszy w zjawiskach wątpliwość podobieństwa, przeciągnęły, każda własną, poza właściwy ich zakres; że z analogii

⁴⁰ Z listu Kamila Krafta do Natansona z 20 sierpnia 1912 r. wiemy, że niemal trzy tygodnie wcześniej (czyli na początku sierpnia 1912 r.) Kraft otrzymał od Natansona jego rozprawę „Zasady teorii promieniowania”, opublikowaną dopiero w 1913 r. (Natanson 1913) i wysoko cenil to opracowanie nie czytając go jeszcze – zob. Kraft 1912 (*dok. arch.*). Kamil Kraft to kolejny fizyk, który znalazł i cenil dokonania Natansona z zakresu teorii promieniowania Plancka. Przeoczyłem jego osobę w moim poprzednim artykule – zob. Kokowski 2019, pp. 368–381. Niestety nie ma w zachowanej korespondencji Natansona innych listów Krafta dotyczących tej kwestii.

uczyniły tożsamość, że subtelną przenośnię pojęły dosłownie, naiwnie i grubo (Natanson 1923, s. 8; kursywa – M.K.).⁴¹

W 1924 r. Natanson, w opracowaniu pt. „O promieniowaniu”, będącym II wersją artykułu z 1911 r. (Natanson 1911b), przedstawił ostateczne stanowisko w kwestii statusu ontologicznego kwantów energii. Otóż kwanty energii istnieją, ale nadal rodzi to trudności koncepcyjne na gruncie fizyki.

Natanson 1924b, ss. 142–143

[...] Boltzmann ustanowił wielkiej wagi twierdzenie: istnieje związek między prawdopodobieństwem rozdziału energii w układzie a jego entropją. Ale ów związek spełnia prawdopodobieństwo rozdziału, obliczone według Boltzmannowskiego określenia; inaczej obliczone prawdopodobieństwo go nie spełnia. Musimy powołać się na ten fakt, ażeby uzasadnić a posteriori, dlaczego w określeniu prawdopodobieństwa rozdziału idziemy za Boltzmanem, za Planckiem. Co tkwi na dnie tego faktu? czego można się z niego nauczyć? mimo długich dyskusyj, nie mamy niewątpliwej odpowiedzi na te i podobne pytania. A gdy twierdzenie Boltzmannna gra dziś coraz ważniejszą rolę w najtrudniejszych badaniach, utwierdzamy się jeszcze raz w spostrzeżeniu dość gorzkim, że wielkie uogólnienia nauki, dopóki są owocne i dobroczynne, bywają zazwyczaj najbardziej niejasne.

⁴¹ W terminologii rozwijanej przez autora artykułu *hipotetyczno-dedukcyjnej metody myślenia korespondencyjnego*, postulowane w kontekście teorii hipotetyczne byty, to faktycznie kwazi-byty – zob. Kokowski 1996. W rozważanym przypadku Natanson dostrzegał uderzającą sprzeczność kwazi-bytów postulowanych przez optykę falową i nową optykę kwantową i widział potrzebę poszukiwania bardziej ogólnej teorii zjawisk optycznych z nowymi kwazi-bytami, która uniknęłaby sprzeczności tych teorii, zachowując jednocześnie odkryte już cząstkowe prawdy – prawa zjawisk zgodnych z predykcjami dotychczasowych teorii; o czątkowych prawdach w naukach matematyczno-fizycznych zob. Costa, French 2003.

Natanson 1924b, ss. 143–144

Idąc tą drogą, Planck został doprowadzony do słynnej formuły, która nosi jego nazwisko i która, o ile wiemy dotychczas, zgadza się dobrze z wynikami pomiarów, w granicach nieuniknionych błędów dostrzeżeń. Nie będziemy tu przytaczali formuły Plancka; zwrócimy raczej uwagę na najważniejszy wniosek, który z niej natychmiast wypływa. Oznaczmy przez elementarną ilość czyli jednostkę energii, o pewnej wybranej częstości; literom k oraz T zachowajmy ich przeznaczenie poprzednie. Formuła Plancka wskazuje nam wówczas, że średnia wartość energii jednego wibratora (lub drgania fundamentalnego) nie wynosi kT , jak wymagałaby tego zasada ekwipartycji energii; stosunek tej średniej do kT nie równa się jedności, lecz zależy znów od stosunku e do kT . W prawdzie średnia energia wibratora lub drgania dążyłaby do przybrania granicznej wartości kT , gdybyśmy uczynili e znikającą, lecz rzeczywistość nie pozwala na to przypuszczenie; gdy bowiem e dąży do zera, formuła Plancka w granicy przeobraża się w prawo Rayleigha, wiemy zaś pewnie, że temu prawu doświadczenie stanowczo zaprzecza rzeczywistej ważności i prawdy. Musimy zatem pozostawić e skończoną w formule Plancka, różną od zera. *Istnieją skończone quanta czyli jednostki energii; uczy nas tego, w oświeceniu rachunku, rzeczywistość promieniowania* (kursywa – M.K.).

Natanson 1924b, ss. 144–145

Roztrząsając warunki równowagi promieniowania, czy odkryliśmy teraz quanta czyli atomy energii? Czy powinniśmy istotnie wyobrażać sobie spójne i łączne, niepodzielne, niezmiennie jednostki promienistej energii? Czekają nas tu ogromne trudności. Atomy chemiczne, przynajmniej w Chemii wczorajszej, klasycznej, są niezmiennie; atom H lub O lub Cl jest elementem najprostszym, nieetykalnym w (zwykłych) reakcjach chemicznych. Elektron jest, podobnie, najprostszą, stałą jednostką ładunku w elektromagnetycznych zjawiskach. Jednostka e energii

jest, przeciwnie, czems̄ złożonem, zależnem i zmiennem; według Plancka e zależy od częstości uważanego elementarnego promieniowania. Ażeby pozostać w zgodzie z ogólnymi, termodynamicznymi prawami równowagi, Planck przypuścił, że jednostka e jest wprost proporcjonalna do częstości drgań promieniowania lub odwrotnie proporcjonalna do jego długości fali. Zależna od charakteru, od tętna promieniowania, zmienna wielkość e nie może być trwałym, wiecznym atomem, nie może być elementem pierwotnym, z którego świat zjawisk jest zbudowany. Lecz jeżeli pomnożymy wielkość e przez okres τ drgania promieniowania, otrzymamy iloczyn $e\tau$ niezmienny. Iloczyn energii przez czas nazywamy w Dynamice działaniem; ważne twierdzenie tej nauki nazywa się zasadą najmniejszego działania. W nowoczesnej teorii quantów twierdzimy dziś zatem, że w fizycznych zjawiskach, lub przynajmniej w promieniowaniu, istnieje pewna stała i powszechna ilość, pewna norma działania; ta norma $e\tau$ lub też krócej h , jak za Plancka przykładem przyjęto ją pisać, wynosi

$$h = 6,55 \times 10^{-27} \times \text{erg} \times \text{sek}.$$

Gdybyśmy znali dokładnie postać praw rządzących najdrobniejszymi przemianami Natury, wiedzielibyśmy zapewne, co znaczy h ; w tym względzie Bohra teoria, która do normy h odwołuje się także, budzi niejaką nadzieję. Zadawalniamy się tymczasowo (niewątpliwie abstrakcyjnym) założeniem, że uniwersalna stała h wyobraża minimum możliwego działania; z jednostek, z atomów h wnosimy rozmaitość ruchów i zmian w ostatnich okrucach ss.nego nam świata.

Natanson 1924b, ss. 149–151

Gdybyśmy próbowali najogólniej wyrazić treść istotną zdobyczy, którą zostaliśmy wzbogaceni przez teorię *quantów*, musielibyśmy zapewne powiedzieć, że w fundamentalnych faktach promieniowania zauważyliśmy istnienie w Naturze pewnej nieciągłości; że odnaleźliśmy ją następnie

w korowodzie innych zjawisk fizycznych, o których bardzo pobieżnie lub wcale nie wspominaliśmy w niniejszym szkicu ulotnym. Ale w czym ta nieciągłość? Planck wyobrażał ją sobie pierwotnie w procesach emisji oraz absorbcji, dokonywanych przez cząstki materji; później próbował ją ograniczyć do samej tylko emisji. Niels Bohr, jak widzieliśmy, dał założeniu Plancka postać konkretną i jasną, zagarniając zarazem pod panowanie teorii ogromne pasmo zjawisk spektralnych. Powracając poniekąd do optycznych wyobrażeń Newtona, Einstein, Stark, J.J. Thomson i inni uczeni chcieli upatrywać nieciągłość we włóknistej budowie promieniowania, w jego niejako przestrzennem utkaniu. W najprostszej postaci nieciągłość, jak wiemy, występuje w pojęciu dynamicznego *działania*, które w czterowymiarowym Minkowskiego świecie staje się bardzo pierwotnym pojęciem; ale możemy ją według życzenia przesuwac do rozmaitych z kolei porządków myślenia. Umieścimy ją, być może, w geometrycznych pojęciach; ogłosimy próżnię za stwór popękany, nieciągły. Zgodzimy się kiedyś zapewne, że czas jest atomistyczny, jak już nawpół ironicznie zalecał Poincare. Ale pozbyć się nieciągłości nie potrafimy żadnym sposobem. Powzięliśmy podejrzenie, że jakowaś nieciągłość tkwi gdzieś w głębi świata wydarzeń; a jest to myśl świeża i silna, która może się wsaczyć do calego naszego sposobu pojmowania Natury, która może wszystko przekształcić, co nie jest z nią zgodne. Dziś jednak w Optyce natrafia na nieprzewyciężone trudności. Zasób doświadczeń, nagromadzonych w Optyce przez przeciąg kilku stuleci, zasób bogaty i ścisły i pewny, stoi w rażącej sprzeczności z jakąkolwiek bądź hipotezą świetlnych przesylek, ładunków albo pocisków. Wobec precyzji zjawisk optycznych myśl *quantów* wydaje się nietylko bezsilna, zbyteczna, lecz sama z sobą niezgodna. Tylko skończony ciąg promienistych w próżni zaburzeń może wyniknąć z emisji skończonej ilości energii; tylko skończony ciąg może dać powód do absorbcji skończonej ilości energii. Tymczasem zwykle pojęcia długości fali oraz częstości lub okresu drgania *nie* stosują się wcale do skończonego, do urywającego

się ciągu falowań; są to pojęcia oznaczone i jasne w *nie- skończonym* tylko, w wiecznie trwającym, w nieograniczenie rozległym ciągu, którego amplituda jest bezwzględnie stała. A zatem pojęcia długości fali, częstości i okresu drgań *nie* mają określenia w kwantowych teoriach; gdy w tych teoriach piszemy n , λ lub τ , grozimy Naturze narzędziem, które strzaskaliśmy sami. Ufajmy jednak przyszłości. Niezrozumiałe dzisiaj zagadki, uśmiechu pełne *jutro* zapewne wyjaśni. W panującej jeszcze ciemności, pod dotknięciem ogromnej, choć nam samym dotychczas niejasnej idei, nieoczekiwany, rozgałęziony splot prawdy z nieobjętego pola rzeczywistości wyrasta (wyróżnienie kursywą pochodzi od Natansona – M.K.).

Dodatek 4.

Wybrane aspekty szkicowej dyskusji z tezami niektórych krytyków Kastlera i Natansona

Artur Kastler (1983, s. 616), nie znając treści listu Natansona do Landégo, zastosował tę samą strategię reinterpretacyjną Natansona: utożsamiał Natansonowskie jednostki energii (“energy units”) z cząstkami (np. fotonami) i Natansonowskie ostateczne cząstki (“ultimate particles”) albo nośniki energii (“receptacles of energy”) z komórkami w przestrzeni fazowej („cells in phase space”).

Taka jednak reinterpretacja Kostlera została negatywnie oceniona przez Johna Stachela (2000 / 2002, ss. 438–439) jako nietrafna, bo anachroniczna: Natanson rozważał rozkład dyskretnych elementów lub jednostek energii w bytach materialnych a nie kwantów światła w komórkach fazowych, gdyż utożsamiał nośniki energii z “ultimate particles of which matter consists [...] capable only of absorbing, containing and emitting amounts of energy which are multiples of these finite and determinate units” (Natanson 1911a, s. 134), analogicznie do tego jak Planck rozważał naładowane oscylatory w równowadze z polem promieniowania w określonej temperaturze. Nie miało to według Stachela nic wspólnego z rozkładem cząstek (promieniowania

albo jakiegoś innego rodzaju) w komórkach przestrzeni fazowej i dlatego nie ma powodu, aby kwestionować brak reakcji Einsteina na artykuł Natansona.

Z kolei Silvio Bergia (1987, s. 344) oraz Jagdish Mehra i Helmut Reichenberg (1982/2001, s. 559) uważali, że Natanson nie podał żadnego fizycznego wyjaśnienia dla wyprowadzenia rozkładu Plancka i na tym polegał podstawowy brak interpretacji Natansona.

Twierdząc to, krytycy Natansona i Kastlera przeoczyli kluczowy aspekt ich argumentacji, bowiem interpretacje te oparte są na przekładzie języka jednego modelu na język drugiego modelu: w artykule z 1911 r. Natanson wskazywał *korespondujące* elementy modelu Plancka i modelu Natansona, a w liście do Landégo z 1925 r. elementy modelu Bosego i modelu Natansona, co później – w 1983 r. – zrobił także Kastler, a wcześniej – w 1925 r. – też Landé, który porównywał model Bosego i model Plancka.

Kontynuowała typ krytyki głoszonej przez Johna Stachela także Daniela Monaldi:

[...] Natanson's language can easily sound like an anticipation of today's common characterization of quantum statistics as a statistics of indistinguishable particles, but the resemblance is only retrospective. Natanson was simply re-discovering the combinatorial difference already stressed by Planck. Natanson did not draw, implicitly or explicitly, the conclusion that counting energy elements as "undistinguishably alike" amounted to a new statistics. He kept within the possibilities of the current statistical style of reasoning. For him as for Planck, it was expected and unremarkable that energy elements should be counted differently from receptacles, since the energy elements did not belong to the class of statistical objects. Comparing radiation and gas, he concluded that they differed only because the receptacles of radiation were poorly endowed with energy while energy was abundantly bestowed upon the gas receptacles (Monaldi 2019, s. 320; zob. też Natanson 1911a, s. 142; Stachel 2000; Monaldi 2009, ss. 387–388).

Nie zgadzam się z taką interpretacją Daniela Monaldi:

1) Zasluga Natansona nie polegała jedynie na powtórnym odkryciu kombinatorycznej różnicy podkreślanej przez Plancka, lecz na wskazaniu niesformułowanego implicite przez Plancka założenia o nieodróżnialnych elementach energii, co doprowadziło do wyjaśnienia podstaw statystycznych teorii promieniowania Plancka i co sprawia, że mamy prawo mówić o statystyce Boltzmana-Plancka-Natansona (termin Kokowskiego).

2) Natanson nie twierdził wcale, że jedyna różnica między promieniowaniem a gazem polega na bardzo małej lub bardzo dużej zawartości energii, lecz, że wielkość parametru n/N (gdzie n – liczba jednostek energii, a N – liczba drgań, vibratorów, cząsteczek, ogólnie przedmiotów), decyduje o typie statystyki, gdy jest skończony mamy przypadek statystyki Boltzmana-Plancka-Natansona, gdy jest nieskończony statystyka ta ma postać statystyki Maxwella-Boltzmana; co za tym też idzie Natanson wskazał parametr korespondencyjny nowej teorii – statystyki Boltzmana-Plancka-Natansona (w terminologii Kokowskiego), której granicznym przypadkiem jest statystyka Maxwella-Boltzmana.

Tę właśnie własność statystyki „Einsteina-Bosego” dostrzegł po latach także Dirac, w swojej fundamentalnej monografii o mechanice kwantowej (1930, §68 Discussions of Einstein-Bose Assemblies, ss. 223–225). Podobnie też Ehrenfest i Uhlenbeck (1927a), idąc za Schrödingerem, Fermim, Heisenbergiem oraz Dirackiem (1926, ss. 662, 667–673), przedstawili kwantową (falowo-mechaniczną) interpretacją klasycznej statystyki Maxwella-Boltzmana (nazywanej przez nich statystyką Boltzmana). Nie ma w tym nic dziwnego, gdyż ujęcie kwantowe statystyki klasycznej i statystyk kwantowych, dziedziczy dorobek wcześniejszych ujęć tego zagadnienia, włącznie z dokonaniem Natansona (to swoiste warstwy „archeologiczne” teorii).⁴²

⁴² Według Alexandra Bacha (1997, ss. 138–139) Natanson ujawnił istnienie kombinatorycznej nieodróżnialności cząstek przeciwstawianej tzw. fizycznej nieodróżnialności cząstek (określonej przez ideę niezmienności prawdopodobieństw konfiguracji względem permutacji ustalonej w mechanice kwantowej i związanej z problemem czynnika „ $N!$ ” we wzorze na entropię gazu doskonałego). U Natansona kombinatoryczna nieodróżnialność hipotetycznych bytów jest konsekwencją jednostajnego rozkładu prawdopodobieństwa liczby zajętości („occupation number”), natomiast w mechanice kwantowej jest ona skutkiem niezmienności prawdopodobieństw konfiguracji względem permutacji; rozkład jednostajny prawdopodobieństwa jest jedynie

Podkreślić należy, że Natanson obszernie i jasno wypowiadał się na te tematy w swoich siedmiu pracach dotyczących statystyki promieniowania i pokrewnych kwestii: Natanson 1911a (wersja angielska); [1911b](#) (ss. 144–160); 1911c (ss. 659–666); 1912a; 1912b; [1913](#) (to najważniejsza praca Natansona na temat teorii promieniowania); [1924b](#) (ss. 125–151) – szczegóły zob. Kokowski [2019](#), ss. 336–343. Ponadto Alexander Bach ([1990a](#), s. 24) podkreślał klarowność podejścia Natansona (opartego na podejściu Boltzmannna wyprowadzenia statystyki „Bosego-Einsteina”), znanego mu z niemieckiej wersji artykułu Natansona (1911c).

Z kolei Simon Saunders ([2020](#), s. 49)⁴³, krytykował podejście Natansona, nawiązując do interpretacji Daniela Monaldi, jednak bez cytowania jej w tym kontekście:

Natanson wprowadził potrzebną jasność. Przedstawił niektóre kombinatoryczne wyrażenia §2.5, w tym tożsamość (18) i (19) (ale tak też zrobił Boltzmann). Wyprowadził nie rozkład Plancka, lecz rozkład prawdopodobieństwa Boltzmannna (Eq. (29)), idąc dokładnie za Boltzmannem! Jego późniejsza dyskusja na temat różnicy między systemami „obficie obdarzonymi” jednostkami energii a tymi „słabo wyposażonymi” nimi, tak jak robił to z gruboziarnistym

trywialnym przypadkiem symetrycznej miary prawdopodobieństwa; Natansonowskie rozumienie nieodróżnialności zostało natychmiast zaakceptowane przez Maxa Plancka (1912/1914) i przyjęte w podręcznikach z fizyki oraz stało się później podstawą klasycznej teorii prawdopodobieństwa i kombinatoryki.

Co do tzw. fizycznej nieodróżnialności cząstek zob. też Hanle 1977; Darrigol [1988](#); [1991](#), Kunz 1989; van Fraassen [1998](#); French, Krause 2006; Dieks [2014](#); [2020](#); Swendsen 2015; Saunders [2020](#).

Dodam także, co przeoczono dotąd, że sam Natanson ([1913](#), s. 58, przyp. 2) powoływał się w kontekście kombinatorycznej nieodróżnialności cząstek na rozumienie prawdopodobieństwa zdarzeń elementarnych przez Henriego Poincarégo (1896, §§ 1–10) i Władysława Gosiewskiego ([1906](#), rodz. 1-szy).

⁴³ “Natanson introduced needed clarity. He set out some of the combinatorial expressions of §2.5, including the identity of (18) and (19) (but so had Boltzmann). He gave a derivation, not of the Planck distribution, but of the Boltzmann probability distribution, Eq. (29) precisely following Boltzmann! His subsequent discussion of the difference between systems ‘abundantly bestowed’ with energy units, and those ‘poorly endowed’, missing as he did the coarsegraining into frequency intervals, was flawed. He made no comment on statistical independence, or the lack of it. There may be no great puzzle here as to why his essay received so little commentary”.

podziałem na przedziały częstotliwości, była błędna. Nie skomentował ani niezależności statystycznej, ani jej braku. Być może nie ma tu wielkiej lamigłówki, dlatego jego esej otrzymał tak mało komentarzy (tłum. M.K.).

Tak jak w przypadku interpretacji Daniela Monaldi, nie zgadzam się z interpretacją Simona Saundersa, w szczególności ze stwierdzeniami, że Natanson nie wyprowadził prawa Plancka, tj. rozkładu / statystyki Boltzmann-Plancka-Natansona (w terminologii Kokowskiego), lecz jedynie rozkład Boltzmann (*bo przecieź Natanson nawiązywał zarówno do Boltzmann, jak i Plancka*); nie skomentował ani niezależności statystycznej, ani jej braku (*bo przecieź to Natanson jako pierwszy zwrócił uwagę na ukryte założenie teorii Plancka – nieodróżnialność elementów energii*) i że przeprowadził błędną analizę systemów „obficie obdarzonych” jednostkami energii i „słabo wyposażonych” tymi jednostkami (*to nie prawda*; stosują się tu także moje uwagi krytyczne dotyczące interpretacji Daniela Monaldi, zob. powyżej).

Odsyłam tutaj także do specjalistycznych opracowań Alexandra Bacha (Bach, Blank, Francke 1985; Bach 1985; 1987; 1988a; 1988b; [1990a](#); 1990b; 1990c; 1991; [1996](#), 1997, ss. 137–138), który szczegółowo wyjaśnia zawiloci podejścia Boltzmann w wyprowadzaniu statystyki „Bosego-Einsteina”. Podzielam też jego tezę⁴⁴:

Koncepcyjnie wyprowadzenie Bosego jest identyczne z wyprowadzeniem Lorentza i Natansona (Mehra, Rechenberg 1982, ss. 562–565). Zgodnie ze znaną hipotezą (Pais 1982, ss. 427 [–428]; Delbrück 1980; Darrigol 1986 [ss. 211–212]), Bose doszedł do statystyki jego imienia przez omyłkę,⁴⁵ przyjmując wielomianowy rozkład liczby obłożenia (oc-

⁴⁴ „Conceptually, Bose derivation is identical to those of Lorentz and Natanson (Mehra, Rechenberg 1982, ss. 562–565). According to familiar hypothesis (Pais 1982, ss. 427[–428]; Delbrück 1980; Darrigol 1986 [s. 212]), Bose arrived at his statistics erroneously, by assuming a multinomial distribution for the occupancy numbers instead of a multinomial distribution for the occupation numbers. This hypothesis is misleading, however, because the occupancy numbers are subject to two constrains, whereas the occupation numbers are subject to only one constraint)” (Bach 1990, s. 28).

⁴⁵ Również Daniela Monaldi twierdzi, że Bose wyprowadził prawo Plancka dzięki popełnieniu szczęśliwego błędu. „Bose gathered that it was “now easy to calculate the thermodynamic probability of a (macroscopically defined) state” [Bose 1924a, on 180]. There only remained to calculate the number of different ways in which the quanta in a given frequency interval could be distributed over the available cells. It was clearly

cupancy numbers) zamiast wielomianowego rozkładu liczb zajętości (occupation numbers). Hipoteza ta jest jednak myląca, ponieważ liczby obłożenia podlegają dwóm ograniczeniom, podczas gdy liczby zajętości (occupation numbers) podlegają tylko jednemu (Bach 1990a, s. 28).⁴⁶

Bibliografia

ŹRÓDŁA ARCHIWALNE

- Einstein, Albert 1924 (*dok. arch.*): Letter to Otto Halpern, after 26 August 1924. [W:] Einstein 2015a, Doc. 309, s. 483. Dostęp online: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol14-doc/585>; ang. tłum. w: Einstein 2015b, Doc. 309, ss. 312–313. Dostęp online: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol14-trans/342>.
- Einstein, Albert 1925 (*dok. arch.*): Letter to Erwin Schrödinger, 28 February 1925. [W:] Einstein 2015a, Doc. 446, ss. 677–678. Dostęp online: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol14-doc/779>; ang. tłum. w: Einstein 2015b, Doc. 446, ss. 438–439. Dostęp online: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol14-trans/468>.
- Einstein, Albert 1926 (*dok. arch.*): Letter to Paul Ehrenfest, 24 November 1926. [W:] Einstein 2018a, Doc. 420, ss. 641–643 (do listu na ss. 643–645 dołączony jest manuskrypt nieopublikowanej ostatecznie notki Uchlenbecka i Ehrenfesta 1926a (*dok. arch.*)). Dostęp online: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol15-doc/753>; ang. tłum. w: Einstein 2018b, Doc. 420, ss. 396–397 (do

not Bose's intention to introduce anything new in this part of the derivation. He admitted in a later interview that he had not been aware of doing anything different from what Boltzmann would have done. [Pais 1979, on 893]. In fact, Bose did use Boltzmann's formula for the probability of an energy distribution of an assembly of equal particles, but in applying it he inadvertently replaced the numbers of molecules having energies $0, e, 2e, 3e, \dots$ with the number of phase-space cells containing $0, 1, 2, 3, \dots$ light quanta. The replacement happily resulted in an energy density formula equivalent to Planck's law, and Bose regarded the operation a success" (Monaldi 2019, s. 324).

Nie mamy tu jednak do czynienia wcale z błędem: manifestuje się tu standardowa strategia reinterpretacji modelu fizyczno-matematycznego zgodnie z hipotetyczno-dedukcyjną metodą myślenia korespondencyjnego (to ponadhistoryczny styl nauk matematyczno-fizycznych). W tym przypadku konkretnym zostosowano strategię myślenia analogicznego – wskazano odpowiadające sobie klasy hipotetycznych bytów teorii. O roli analogii w naukach matematyczno-fizycznych, por. Bailer-Jones 2009, ss. 46–80.

⁴⁶ Zob. przyp. 21.

listu na ss. 397–399 dołączony jest manuskrypt nieopublikowanej ostatecznie notki Uchlenbecka i Ehrenfesta 1926a (*dok. arch.*). Dostęp online: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol15-trans/430>.

Einstein, Albert 2015a: *The Collected Papers of Albert Einstein*, Vol. 14. *The Berlin Years: Writings & Correspondence, April 1923–May 1925 – Documentary Edition*. Edited by Diana Kormos Buchwald, József Illy, Ze'ev Rosenkranz, Tilman Sauer & Osik Moses. Princeton, New Jersey, USA: Princeton University Press. Dostęp online: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol14-doc/>.

Einstein, Albert 2015b: *The Collected Papers of Albert Einstein*, Vol. 14. *The Berlin Years: Writings & Correspondence, April 1923–May 1925 (English Translation Supplement) – Documentary Edition*. Edited by Diana Kormos Buchwald, József Illy, Ze'ev Rosenkranz, Tilman Sauer & Osik Moses Translated by Ann M. Hentschel & Jennifer Nollar James Klaus Hentschel, consultant. Princeton, New Jersey, USA: Princeton University Press. Dostęp online: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol14-trans/>.

Einstein, Albert 2018a: *The Collected Papers of Albert Einstein*, Vol. 15. *The Berlin Years: Writings & Correspondence, June 1925–May 1927 – Documentary Edition*. Edited by Diana Kormos Buchwald, József Illy, A. J. Kox, Dennis Lehmkuhl, Ze'ev Rosenkranz & Jennifer Nollar James. Dostęp online: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol15-doc/>.

Einstein, Albert 2018b: *The Collected Papers of Albert Einstein*, Vol. 15: *The Berlin Years: Writings & Correspondence, June 1925–May 1927 (English Translation Supplement)*. Edited by Diana Kormos Buchwald, József Illy, A. J. Kox, Dennis Lehmkuhl, Ze'ev Rosenkranz & Jennifer Nollar James. Translated by Jennifer Nollar James, Ann M. Hentschel, Mary Jane Teague. Dostęp online: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol15-trans/>.

Halpern, Otto 1924 (*dok. arch.*): Letter to Albert Einstein, 26 August 1924. [W:] Einstein 2015a, Doc. 308, ss. 481–482; ang. tłum. w: Einstein 2015b, Doc. 308, ss. 310–312.

Kraft, Kamil 1912 (*dok. arch.*): List do Władysława Natansona (Kraków, 20 sierpnia 1912). [W:] Korespondencja Władysława Natansona z lat 1884–1937. T. 9, Kowalewski – Kutrzeba [Rękopis], s. 79. Dostęp online: <https://jbc.bj.uj.edu.pl/dlibra/publication/610273/edition/588743/content>.

Landé, Alfred 1925 (*dok. arch.*): List do Władysława Natansona (Tybinga, 18 listopada 1925). [W:] Korespondencja Władysława Natansona z lat 1884–1937. T. 10, Laar – Łukasiewicz [Rękopis], s. 6. Dostęp online: <https://jbc.bj.uj.edu.pl/publication/610285>.

Landé, Alfred; Kuhn, Thomas S.; Heilbron, John 1962: Interview of Alfred Landé by Thomas S. Kuhn and John Heilbron on 1962 March 5, 6, 7, 8 and June

15. Niels Bohr Library & Archives, American Institute of Physics, College Park, MD USA. Dostęp online: <http://www.aip.org/history-programs/niels-bohr-library/oral-histories/4728-1>.

Natanson, Władysław 1923: *Oblicze natury: Odczyty, przemówienia i szkice* [Rękopis]/przez dra Władysława Natansona. Biblioteka Jagiellońska BJ Rkp. 8751 II. Dostęp online: <https://jbc.bj.uj.edu.pl/Content/641478/zip/>.

Natanson, Władysław [Władysław] 1925: Letter to Alfred Landé (Kraków, 14 November 1925). American Philosophical Society Library, Philadelphia, PA, USA. Archive for the History of Quantum Physics, 1898–1950 (bulk). Volume reel 4: reel-frame 19. Call Number Mss.530.1.Ar2.

Schrödinger, Erwin 1925a (*dok. arch.*): Letter to Alfred Landé (28 October 1925). American Philosophical Society Library, Philadelphia, PA, USA. Archive for the History of Quantum Physics, 1898–1950 (bulk). Call Number Mss.530.1.Ar2, Box(es)/Folder(s), reel 37: reel-frame 8 4.

Schrödinger, Erwin 1925b (*dok. arch.*): List do Alberta Einsteina (Zurich, 3 listopada, 1925). [W:]. Einstein 2018b, doc. 101, ss. 181–183. Dostęp online: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol15-doc/293>. Przekład ang. [W:] Einstein 2018b, doc. 101, ss. 120–121. Dostęp online: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol15-trans/154>.

Schrödinger, Erwin 1925c (*dok. arch.*): Letter to Alfred Landé (16 November 1925). American Philosophical Society Library, Philadelphia, PA, USA. Archive for the History of Quantum Physics, 1898–1950 (bulk). Call Number Mss.530.1.Ar2, Box(es)/Folder(s), reel 37: reel-frame 8.

Uhlenbeck, G.E.; Ehrenfest, P. 1926 (*archive document*): Führt die Bose-Einsteinsche Statistik bei idealen Gasen zu einer Entartungs- condensation? Manuscript f. *Z.f. miefte Physik*. [W:] Einstein 2018, Doc. 420, ss. 643–645. Dostęp online: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol15-doc/753>.

OPRACOWANIA

Bach, Alexander 1985: On the quantum properties of indistinguishable classical particles. *Lettere al Nuovo Cimento* 43(8), ss. 383–387. DOI: <https://doi.org/10.1007/bf02746971>

Bach, Alexander 1987: Indistinguishability or distinguishability of the particles of Maxwell-Boltzmann statistics. *Physics Letters A* 125(9), ss. 447–450.

Bach, Alexander 1988a: The concept of indistinguishable particles in classical and quantum physics. *Foundations of Physics* 18(6), ss. 639–649. DOI: <https://doi.org/10.1007/bf00734566>. Dostęp online:

- Bach, Alexander 1988b: The Maxwell-Boltzmann distribution derived from Bose-Einstein statistics. *Physics Letters A* 134(1), ss. 1–3. DOI: 10.1016/0375-9601(88)90535-X.
- Bach, Alexander 1990a: Boltzmann probability-distribution of 1877. *Archive for History of Exact Sciences* 41(1), ss. 1–40. Dostęp online: <https://www.jstor.org/stable/41133876>.
- Bach, Alexander 1990b: Indistinguishable particles: definitions and implications. *Physics Letters A* 151(1–2), ss. 1–6. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(90\)90835-C](https://doi.org/10.1016/0375-9601(90)90835-C).
- Bach, Alexander 1990c: Indistinguishability, Interchangeability, and Indeterminism. [In:] Roger Cooke, Domenico Costantini (eds.), *Statistics in Science. The Foundations of Statistical Methods in Biology, Physics and Economics*. “Boston Studies in the Philosophy of Science” vol. 122, ss. 149–166.
- Bach, Alexander 1991: Why Are Independent Bosons Distributed According to Maxwell-Boltzmann Statistics? *EPL (Europhysics Letters)* 14(5), ss. 391–396.
- Bach, Alexander 1997: *Indistinguishable Classical Particles*. “Lecture Notes in Physics. New Series m: Monographs” m42. Berlin, ... Tokyo: Springer.
- Bach, Alexander; Blank, H.; Francke, H. 1985: Bose-Einstein statistics derived from the statistics of classical particles. *Lettere al Nuovo Cimento (Series 2)* 43, ss. 195–198.
- Badino, Massimiliano 2006: Was there a statistical Turn ? The Interaction between Mechanics and Probability in Boltzmann’s Theory of Non Equilibrium (1872–1877). Dostęp online: http://philsci-archive.pitt.edu/2878/1/Was_There_a_Statistical_Turn.pdf.
- Badino, Massimiliano 2009: The Odd Couple: Boltzmann, Planck and the Application of Statistics to Physics (1900–1913). *Annalen der Physik* 18(2–3), ss. 81–101. DOI: 10.1002/andp.200810336.
- Badino, Massimiliano 2010: Pursuing an Idea: Planck’s Quantum Theory of Ideal Gas. Dostęp online: https://www.academia.edu/1566066/Pursuing_an_Idea_Plancks_Quantum_Theory_of_Ideal_Gas.
- Badino, Massimiliano 2015: Three dogmas on scientific theories. *PhilArchive*. <https://philpapers.org/archive/BADTDO-7.pdf>.
- Badino, Massimiliano 2015b: Deconstructing Planck. In book: *The Bumpy Road: Max Planck from Radiation Theory to the Quantum (1896–1906)*. Springer, ss. 81–110. DOI: 10.1007/978-3-319-20031-6_4. Partially Dostęp online: <https://books.google.pl/books?id=JcvWCQAAQBAJ>.
- Badino, Massimiliano 2016: What have the historians of quantum physics ever done for us? *Centaurus* 58(4), ss. 327–346. DOI: <https://doi.org/10.1111/1600-0498.12127>.

- Badino, Massimiliano 2021: Of weighting and counting: statistics and ontology in the old quantum theory. Forthcoming in: Bacciagaluppi, G., Darrigol, O., Freire Jr, O., Hartz, T., Joas, C., Kojevnikov, A. (eds.), *Oxford Handbook of the History of Interpretations and Foundations of Quantum Mechanics*. Oxford: Oxford University Press (expected publication: late 2021). Dostęp online: <https://philarchive.org/archive/BADOWA>.
- Bailer-Jones, Daniela M. 2009: *Scientific Models in Philosophy of Science*. Pittsburgh: University of Pittsburgh Press.
- Bergia, Silvio 1987/2009: Who discovered the Bose-Einstein statistics? [In:] Manuel G. Doncel, Armin Hermann, Louis Michel, Abraham Pais (eds.), *Symmetries in physics (1600–1980)*. 1st International Meeting on the History of Scientific Ideas, Sant Feliu de Guixols, Spain, 20–26 September 1983 (Madrid: Madrid University, 1987), ss. 221–250. Reprinted in: Kameshwar C. Wali (ed.), *Satyendra Nath Bose: his life and times. Selected works (with commentary)* (Singapore: World Scientific Publishing, 2009), ss. 332–358.
- Blanpied, William A. 1972: Satyendranath Bose: Co-Founder of Quantum Statistics. *American Journal of Physics* 40(9), ss. 1212–1220. DOI: 10.1119/1.1986805.
- Boltzmann, Ludwig 1868 (reprinted 1909a)/2014a (English translation and comments): Studien über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft zwischen bewegten materiellen Punkten. *Wiener Bericht*. 58, ss. 517–560. Reprinted in: Boltzmann 1909a, ss. 49–96. Translation into English and comments: Gallavotti 2014, ss. 139–142, 142–148.
- Boltzmann, Ludwig 1872: Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen. *Wiener Bericht* 66, ss. 275–370. Reprinted in: Boltzmann 1909a, ss. 316–402.
- Boltzmann, Ludwig 1877 (reprinted 1909b)/2002 (English translation); 2014b (Partial translation and comments): Über die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze des mechanischen Wärmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung, respective den Sätzen über das Wärmegleichgewicht. *Graz Sitzb.d. Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, mathematisch-naturwissen* 76, ss. 373–435. Reprinted in: Boltzmann 1909b, ss. 164–223/2002 (English translation by Joël Le Roux): On the relationship between the second main theorem of mechanical heat theory and the probability calculation with respect to the results about the heat equilibrium. May 2, 2002. Dostęp online: <http://users.polytech.unice.fr/~leroux/boltztrad.pdf>. Partial translation and comments: Gallavotti 2014, ss. 178–181.
- Buchwald, Jed Z. (ed.) 1995: *Scientific Practice: Theories and Stories of Doing Physics*. Chicago and London: The University of Chicago Press.
- Boltzmann, Ludwig 1909a (reprinted 2014a): *Wissenschaftliche Abhandlungen*. Band I. (1865–1874). Fritz Hasenöhl (ed.). PDF mit OCR-Texterkennung. Dostęp

online: <https://services.phaidra.univie.ac.at/api/object/o:63647/diss/Content/get>.

Boltzmann, Ludwig 1909b (reprinted 2014b): *Wissenschaftliche Abhandlungen*. Band II. (1875–1881). Fritz Hasenöhl (ed.). PDF mit OCR-Texterkennung. Dostęp online: <https://services.phaidra.univie.ac.at/api/object/o:63651/diss/Content/get>.

Boltzmann, Ludwig 1909c (reprinted 2014c): *Wissenschaftliche Abhandlungen*. Band III. (1882–1905). Fritz Hasenöhl (ed.). PDF mit OCR-Texterkennung. Dostęp online: <https://services.phaidra.univie.ac.at/api/object/o:63654/diss/Content/get>.

Bose, Satyendra Nath 1924a / 1976, 2009b: Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese. *Zeitschrift für Physik* 26, ss. 178–181. Reprinted 2009a in: Kameshwar C. Wali (ed.), *Satyendra Nath Bose: his life and times. Selected works (with commentary)* (Singapore: World Scientific Publishing, 2009), ss. 21–25 (86–99). Dostęp online: <https://books.google.pl/books?id=L01pDQAAQBAJ&pg=PA21>. Dostęp online: <https://books.google.pl/books?id=L01pDQAAQBAJ&pg=PA26>. English translation 1976: Planck's law and the light quantum hypothesis (translated by O. Theimer and Budh Ram). *American Journal of Physics* 44, ss. 1056–1057. Dostęp online: http://www.ffn.ub.es/luisnavarro/nuevo_maletin/Bose_1924.pdf. English translation 2009b: Planck's Law and the Light-Quantum Hypothesis, ss. 26–29 (100–113).

Bose, Satyendra Nath 1924b (reprinted 2009c; English transl. 2009d): Wärmegleichgewicht im Strahlungsfeld bei Anwesenheit von Materie. *Zeitschrift für Physik* 27 (1) (December 1924), ss. 384–393. Reprinted 2009c in: Kameshwar C. Wali (ed.), *Satyendra Nath Bose: his life and times. Selected works (with commentary)* (Singapore: World Scientific Publishing, 2009), ss. 30–39 (104–113). Dostęp online: <https://books.google.pl/books?id=L01pDQAAQBAJ&pg=PA30>; English translation 2009d: Thermal Equilibrium in the Radiation Field in the Presence of Matter. [In:] Kameshwar C. Wali (ed.), *Satyendra Nath Bose: his life and times. Selected works (with commentary)* (Singapore: World Scientific Publishing, 2009), ss. 40–47 (114–122). Dostęp online: <https://books.google.pl/books?id=L01pDQAAQBAJ&pg=PA40>.

Bothe, Walther 1927: Lichtquanten und Interferenz. *Zeitschrift für Physik* 41 (4–5), ss. 332–344. DOI: 10.1007/BF01391247.

Buchwald, Jed Z. (ed.) 1995: *Scientific Practice: Theories and Stories of Doing Physics*. Chicago and London: The University of Chicago Press.

Camilleri, Kristian 2011: Atom and Individual: The Trajectory of a Metaphor. [In:] Emma Kowal, Ghassan Hage (eds.), *Force Movement Intensity: The Newtonian Imagination in the Humanities and Social Sciences*. Melbourne University Publishing, ss. 115–127

- Costa, Newton C. A. da; French, Steven 2003: *Science and Partial Truth: A Unitary Approach to Models and Scientific Reasoning*. “Oxford Studies in the Philosophy of Science”. Oxford University Press.
- Crombie, Alistar C. 1994: *The Styles of Scientific Thinking in the European Tradition*, 3 vols. London: Duckworth.
- Darrigol, Olivier 1986: The origins of the quantized matter wave. *Historical Studies in the Physical and Biological Sciences* 16(2), ss. 197–253. DOI: 10.2307/27757565. Dostęp online: <http://www.jstor.org/stable/27757565>.
- Darrigol, Olivier 1988: Statistics and combinatorics in early quantum theory. *Historical Studies in the Physical Sciences* 19, ss. 17–80. DOI: 10.2307/27757616. Dostęp online: <https://www.jstor.org/stable/27757616>.
- Darrigol, Olivier 1991: Statistics and combinatorics in early quantum theory, II: Early symptoma of indistinguishability and holism. *Historical Studies in the Physical Sciences* 21, ss. 237–298. Dostęp online: <https://www.jstor.org/stable/27757664>.
- Darrigol, Olivier 1992: *From c-numbers to q-numbers. The classical analogy in the history of quantum theory*. Berkeley: University of California Press. Dostęp online; <https://publishing.cdlib.org/ucpressebooks/view?docId=ft4t1nb2gv;brand=ucpress>
- Darrigol, Olivier 2018: *Atoms, Mechanics, and Probability: Ludwig Boltzmann’s Statistico-Mechanical Writings – an Exegesis*. Oxford University Press. Częściowo dostępne online: <https://books.google.pl/books?id=lz5MDwAAQBAJ>.
- Debye, Peter 1910: Der Wahrscheinlichkeitsbegriff in der Theorie der Strahlung. *Annalen der Physik* 33, ss. 1427–1434.
- Delbrück, M. 1980: Was Bose-Einstein statistics arrived at by serendipity? *Journal of Chemical Education* 57(7), ss. 467–470. DOI: 10.1021/ed057p467.
- Dieks, Dennis 2014: The Logic of Identity: Distinguishability and Indistinguishability in Classical and Quantum Physics. *Foundations of Physics* 44(12), ss. 1302–1316. Dostęp online: <https://core.ac.uk/download/pdf/33752412.pdf>.
- Dieks, Dennis 2020: Identical Particles in Quantum Mechanics: Against the Received View. Dostęp online: <http://philsci-archive.pitt.edu/18684/1/AgainstRV.pdf>.
- Dirac, Paul Adrien Maurice 1926: On the theory of quantum mechanics. *Proceedings of the Royal Society A Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 112(762), ss. 661–677. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1926.0133>. Dostęp online: <https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rspa.1926.0133>.
- Dirac, Paul Adrien Maurice 1927: The quantum theory of the emission and absorption of radiation. *Royal Society. Proceedings A* 114, ss. 243–265. Dostęp

online: http://hermes.ffn.ub.es/luisnavarro/nuevo_maletin/Dirac_QED_1927.pdf.

Dirac, Paul Adrien Maurice 1930: *The Principles Of Quantum Mechanics*. <https://archive.org/download/in.ernet.dli.2015.177580/2015.177580.The-Principles-Of-Quantum-Mechanics.pdf>.

Duhem, Pierre 1906 (2d ed. 1914)/1908, 1954: *La théorie physique, son objet et sa structure*. Paris; German translation: *Ziel und Struktur der physikalischen Theorie*. Trans. Friedrich Adler. Introd. Ernst Mach (Leipzig, 1908); English translation *The Aim and Structure of Physical Theory*. Engl. transl. (of 2d ed.) P.P. Wiener (Princeton, 1954).

Duhem, Pierre 1908/1969: *ΣΟΖΑΙΝ ΤΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ. Essai sur la notion de théorie physique de Platon à Galilée*. Paris: A.Hermann et Fils. English translation: *To Save the Phenomena. An Essay on the Idea of Physical Theory from Plato to Galileo*. Trans. Edmund Dolan and Chaninah Maschler. Chicago, London: The University of Chicago Press, 1969.

Ehrenfest, Paul 1911 (received: 8 June 1911): Welche Züge der Lichtquantenhypothese spielen in der Theorie der Wärmestrahlung eine wesentliche Rolle? *Annalen der Physik* 341/11, ss. 91–118, reprinted in: *Collected Scientific Papers* (1959), ss. 185–212. Dostęp online: <https://zenodo.org/record/1424215#.XQPIRMTVKUK>.

Ehrenfest, Paul 1925/2016: Energieschwankungen im Strahlungsfeld oder Kristallgitter bei Superposition quantisierter Eigenschwingungen. *Zeitschrift für Physik* 34, ss. 362–373 / English translation 2016 by Elise Crull: Energy fluctuations in the radiation field or crystal lattice through superposition of quantized normal modes. Dostęp online: http://philsci-archive.pitt.edu/13003/1/Ehrenfest1925_translation.pdf.

Ehrenfest, P.; Kamerlingh-Onnes, H. 1914: Simplified deduction of the formula from the theory of combinations which Planck uses as the basis of his radiation theory. *Proceedings Amsterdam Academy* 17, ss. 870–873. Reprinted in Klein 1959a, ss. 353–356.

Ehrenfest, P.; Uhlenbeck, G.E. 1927: Die wellenmechanische Interpretation der Boltzmannschen Statistik neben der der neueren Statistiken. *Zeitschrift für Physik* 41, ss. 24–26 <http://dx.doi.org/10.1007/BF01454759>.

Einstein, Albert 1905: Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. *Annalen der Physik* 17 (6), ss. 132–148. DOI:10.1002/andp.19053220607. Dostęp online: http://www.physik.uni-augsburg.de/annalen/history/einstein-papers/1905_17_132-148.pdf. A partial English translation “On a Heuristic Point of View about the Creation and Conversion of Light” is Dostęp from *Wikisource*. Dostęp online: <https://en.wikisource.org/?curid=59468>.

- Einstein, Albert 1916: Zur Quantentheorie der Strahlung. *Mitteilungen der Physikalischen Gesellschaft* (Zürich) 18, ss. 47–62.
- Einstein, Albert 1917: Zur Quantentheorie der Strahlung. *Physikalische Zeitschrift* 18, ss. 121–128.
- Einstein, Albert 1918: Motive des Forschens. [In:] Zu Max Plancks sechzigstem Geburtstag. Ansprachen, gehalten am 26. April 1918 in der Deutschen Physikalischen Gesellschaft von E. Warburg, M. v. Laue, A. Sommerfeld und A. Einstein. Karlsruhe: C.F. Müllersche Hofbuchhandlung, 1918, ss. 29–32. / Vol. 7, *The Berlin Years: Writings, 1918–1921*, ss. 55–58. Available online: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol7-doc/103>. / English translation: Motive for research. [In:] A. Einstein, *Ideas and Opinions*, trans. Sonja Bargmann. New York: Crown, 1982. Vol. 7, *The Berlin Years: Writings, 1918–1921 (English translation supplement)*, ss. 42–45. Dostęp online: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol7-trans/58>.
- Einstein, Albert 1924 (presented 10 July 1924; published 20 September 1924)/2015a Doc. 283; 2015b, DOC. 283: Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. *Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin). Physikalischmathematische Klasse* (10.7.1924) 22, ss. 261–267. Dostęp online: https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/physik_ap/demokritov/mbecfornonphysicists/einstein_1924_1925.pdf. Reprinted in: Einstein 2015a, Doc. 283, ss. 433–441. Dostęp online: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol14-doc/535>. English translation: Quantum theory of ideal gas. [In:] Einstein 2015b, DOC. 283, ss. 276–283. Dostęp online: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol14-trans/306>.
- Einstein, Albert 1925a (dated: December 1924; presented: 8 January 1925; published: 9 February 1925)/2015a, Doc. 385; 2015b, Doc. 385: Quantentheorie des einatomigen idealen Gases, 2. Abhandlung. *Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin). Physikalischmathematische Klasse* (8.1.1925) 23, ss. 3–14. Dostęp online: https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/physik_ap/demokritov/mbecfornonphysicists/einstein_1924_1925.pdf. Reprinted in: Einstein 2015a, Doc. 385, ss. 580–594. Dostęp online: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol14-doc/682>. English translation: Quantum theory of ideal gas II. [In:] Einstein 2015b, DOC.385, ss. 371–383. Dostęp online: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol14-trans/401>.
- Einstein, Albert 1925b (presented: 29 January 1925; published: 5 March 1925)/2015a, Doc. 427; 2015b, Doc. 427: Zur Quantentheorie des idealen Gases. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin). Physikalischmathematische Klasse* 23, ss. 18–25. Reprinted in: Einstein 2015a, Doc. 427, ss. 648–657. Dostęp online: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol14-trans/401>.

- [doc/750](#). English translation: Quantum theory of ideal gas. [In:] Einstein 2015b, DOC.427, ss. 418–425. Dostęp online: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol14-trans/448>.
- Einstein, Albert 1930: Statistische Eigenschaften der Strahlung. *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*: 543.
- Einstein, Albert 1987–2018: *The Collected Papers of Albert Einstein*. Vol. 1–15. Edited by John Stachel, David C. Cassidy, Robert Schulmann, Jürgen Renn, Olga Griminger, Gary Smith, Robert Summerfield. Princeton, New Jersey, USA: Princeton University Press. Dostęp online: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/>.
- Einstein, Albert 2018: The Collected Papers of Albert Einstein, Vol. 15. The Berlin Years: Writings & Correspondence, June 1925–May 1927 – Documentary Edition. Edited by Diana Kormos Buchwald, József Illy, A. J. Kox, Dennis Lehmkuhl, Ze'ev Rosenkranz & Jennifer Nollar James. Princeton, New Jersey, USA: Princeton University Press. Dostęp online: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol15-doc/>.
- Einstein, Albert; Ehrenfest, Paul 1923: Zur Quantentheorie des Strahlungsgleichgewichtes. *Zeitschrift für Physik* 19, ss. 301–306. Dostęp online: <https://informationphilosopher.com/solutions/scientists/pauli/Einstein-EhrenfestB.pdf>.
- Ehrenfest, Paul 1911: Welche Züge der Lichtquantenhypothese spielen in der Theorie der Wärmestrahlung eine wesentliche Rolle? *Annals of Physics* 4 (36), ss. 91–118. Dostęp online: <https://pl.booksc.xyz/dl/375771/e96031>.
- Ehrenfest, Paul 1925/2016: Energieschwankungen im Strahlungsfeld oder Kristallgitter bei Superposition quantisierter Eigenschwingungen. *Zeitschrift für Physik* 34, ss. 362–373. / English translation by Ellise Crull: Energy fluctuations in the radiation field or crystal lattice through superposition of quantized normal modes. Dostęp online: http://philsci-archive.pitt.edu/13003/1/Ehrenfest1925_translation.pdf.
- Ehrenfest, Paul; Kamerlingh Onnes, Heike 1915a/1915b: Vereinfachte Ableitung der kombinatorischen Formel, welche der Planckschen Strahlungstheorie zugrunde liegt. *Annalen der Physik* (Leipzig, 4th ser.) 46, ss. 1021–1024. DOI: 10.1002/andp.19153510709 / English translation 1915b: Simplified deduction of the formula from the theory of combinations which Planck uses as the basis of his radiation theory. *Philosophical Magazine Series* 6, 29 (170), ss. 297–301. DOI: 10.1080/14786440208635308; *Proceedings Amsterdam Academy* 17, 870–873. Reprinted in Klein 1959a, ss. 353–356.
- Elwick, James 2012: Layered History: Styles of Reasoning as Stratified Conditions of Possibility. *Studies in History and Philosophy of Science* 43(4), ss. 619–627.

- Enders, Peter 2016: Historical Prospective: Boltzmann's versus Planck's state counting – Why Boltzmann did not arrive at Planck's distribution law. *Journal of Thermodynamics*, Article ID 9137926, ss. 13. Dostęp online: <https://downloads.hindawi.com/archive/2016/9137926.pdf>.
- Feyerabend, Paul K. 1975 (2d modified ed. 1988): *Against Method. Outline of an Anarchistic Theory of Knowledge*. London: NLB Ltd.
- Fick, Dieter; Kant, Horst 2013: The Concepts of Light Atoms and Light Molecules and Their Final Interpretation. Chapter 4 in: Katzir, Lehner, Renn (eds.) 2013, ss. 89–124.
- Fleck, Ludwik 1935/1979, 1986: *Entstehung und Entwicklung einer wissenschaftlichen Tatsache: Einführung in die Lehre vom Denkstil und Denkkollektiv*. Basel, Switzerland: Benno Schwabe & Co. Przekład ang. [1979]: *Genesis and Development of a Scientific Fact*, Ed. by T.J.Trenn and R.K.Merton, transl. by F.Bradley and T.J.Tren, foreword by T.S.Kuhn. Chicago and London: The University of Chicago Press. Przekład pol. 1986: *Powstanie i rozwój faktu naukowego. Wprowadzenie do nauki o stylu myślowym i kolektywie myślowym*. Tłumaczenie z języka niemieckiego M.Tuszkiewicz. Wstęp do wydania polskiego Z.Cackowski. Lublin: Wydawnictwo Lubelskie.
- Fowler, R. H. 1926. General Forms of Statistical Mechanics with Special Reference to the Requirements of the New Quantum Mechanics. *Proceedings of the Royal Society of London A* 113, ss. 432-449. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1926.0163>. Dostęp online: <https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rspa.1926.0163>.
- Fowler, R. H.; Darwin, C. G. 1922: On the Partition of Energy. *Philosophical Magazine Series* 6, 44(261), ss. 450-479. DOI: 10.1080/14786440908565189.
- Fowler, R. H.; Darwin, C. G. 1922: On the partition of energy. Part II. Statistical principles and thermodynamics. *Philosophical Magazine Series* 6, 44(263), ss. 823–842. DOI: 10.1080/14786441208562558.
- Fraassen, Bas van 1998: The Problem of Indistinguishable Particles. [In:] Elena Castellani (ed.), *Interpreting Bodies: Classical and Quantum Objects in Modern Physics*. Princeton, New Jersey, USA : Princeton University Press, ss. 73–92. DOI: <https://doi.org/10.2307/j.ctv173f1xr.10>.
- French, Steven; Krause, Décio 2006: *Identities in Physics: A Historical, Philosophical, and Formal Analysis*. Oxford: Oxford University Press.
- Gallavotti, Giovanni 2014: *Nonequilibrium and Irreversibility*. Springer, Series “Theoretical and Mathematical Physics”, 2014, ISBN: 978-3-319-06757-5 (Print) 978-3-319-06758-2 (Online). Dostęp online: <https://arxiv.org/pdf/1311.6448>.
- Gavroglu, Kostas 1990: Differences in Style as a Way of Probing the Context of Discovery. *Philosophia* 45, ss. 53–75. Dostęp online: <https://www.philosopica.ugent.be/wp-content/uploads/fulltexts/45-4.pdf>.

- Gerlach, Walther; Landé, Alfred 1926: Ein Experiment über Kohärenzfähigkeit von Licht. *Zeitschrift für Physik* 34, ss. 169–173. DOI: 10.1007/BF01382260. [In:] Alfred Landé 1988: *Selected Scientific Papers of Alfred Landé*. Edited by P. Barut, Alwyn van der Merwe. Dordrecht, Boston, Lancaster, Tokyo: D. Reidel Publishing Company, ss. 244–248. Dostęp online: <https://books.google.pl/books?id=2ZPqCAAAQBAJ&pg=PA244>.
- Gosiewski, Władysław 1906: *Zasady Rachunku Prandopodobieństwa*. Warszawa: Skład główny w Księgarni E. Wende i Ska; w drukarni Noskowskiego. Dostęp online: <https://crispa.uw.edu.pl/object/files/411822/display/PDF>.
- Hanle, Paul A. 1977: The coming of age of Erwin Schrödinger: His quantum statistics of ideal gases. *Archive for History of Exact Sciences* 17, ss. 165–192. DOI:10.1007/bf02464979.
- Heisenberg, Werner 1926: Mehrkörperproblem und Resonanz in der Quantenmechanik. *Zeitschrift für Physik* 38, ss. 411–426. Dostęp online: https://www.academia.edu/6628871/Mehrk%C3%B6rperproblem_und_Resonanz_in_der_Quantenmechanik. Engl. translation: 2006: The Multi-Body Problem and Resonance in Quantum Mechanics. Translated by A.F. Kracklauer. Dostęp online: <https://web.archive.org/web/20170329163820/http://nonlocal-physics.0catch.com/multi.pdf>.
- Heisenberg, Werner 1927: Schwankungserscheinungen und Quantenmechanik. *Zeitschrift für Physik* 40(7), ss. 501–506.
- Hentschel, Klaus 2006: Light Quanta: the Maturing of a Concept by the Stepwise Accretion of Meaning. *Physics and Philosophy* Id 006. Dostęp online: <https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/24257/1/006.pdf>.
- Hentschel, Klaus 2015: Die allmähliche Herausbildung des Konzepts ‚Lichtquanten‘. *Ber. Wissenschaftsgesch.* 38 (2015) 121–139. DOI: 10.1002/bewi.201501718.
- Hentschel, Klaus 2018: ‘Twelve Semantic Layers of ‘Light Quantum’ and ‘Photon’’. Chapter. DOI: [10.1007/978-3-319-95252-9_3](https://doi.org/10.1007/978-3-319-95252-9_3). [In:] Klaus Hentschel, *Photons. The History and Mental Models of Light Quanta*. Springer, ss. 39–92. First Online: 17 August 2018.
- Hacking, Ian 1975: *The Emergence of Probability: A Philosophical Study of Early Ideas about Probability, Induction and Statistical Inference*. “Cambridge Series on Statistical & Probabilistic Mathematics”. Cambridge: Cambridge University Press.
- Hacking, Ian 1982: Language, Truth, and Reason. [In:] Martin Hollis, Steven Lukes (eds.), *Rationality and Relativism*. Oxford: Blackwell, ss. 48–66. Reprinted in Hacking 2002, 159–177.
- Hacking, Ian 1983: *Representing and Intervening. Introductory Topics in the Philosophy of Natural Science*. Cambridge: Cambridge University Press.

- Hacking, Ian 1987: Was There a Probabilistic Revolution 1800–1930? [In:] Lorenz Kreger, Lorraine J, Daston, and Michael Heidelberger (eds.), *The Probabilistic Revolution: Volume I*. Cambridge, MA, USA; London, England: The MIT Press, ss. 45–55.
- Hacking, Ian 1990: *The Taming of Chance*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Hacking, Ian 1992a: ‘Style’ for Historians and Philosophers. *Studies in History and Philosophy* 23, ss. 1–20.
- Hacking, Ian 1992b: Statistical Language, Statistical Truth and Statistical Reason: The Self-Authentication of a Style of Scientific Reasoning, [In:] Ernan McMullin (ed.), *The Social Dimensions of Science*. Notre Dame, IN, USA: University of Notre Dame Press, ss. 130–157.
- Hacking, Ian 2002: *Historical Ontology*. Cambridge, MA, USA: Harvard University Press.
- Hacking, Ian 1994: Styles of Scientific Thinking or Reasoning: A New Analytical Tool for Historians and Philosophers of Science. [In:] Kostas Gavroglu, Joan Christianidis, and Efthymios Nicolaidis (eds.), *Trends in the Historiography of Science*. Dordrecht: Kluwer Academic, ss. 31–48.
- Hacking, Ian 2007: The Laboratory Style of Thinking and Doing. Lecture at the Science, Technology and Society Workshop, National Tsing Hua University, Taiwan, 12th November 2007. Dostęp online: https://web.archive.org/web/20160303215220/http://stm.ym.edu.tw/files/u1/HW_Ian_Hacking.pdf.
- Hacking, Ian 2012: ‘Language, Truth and Reason’ 30 years later. *Studies in History and Philosophy of Science* 43, ss. 599–609.
- Hacking, Ian 2015: Probable Reasoning and Its Novelties. [In:] Theodore Arabatzis, Jergen Renn, Ana Simles (eds.), *Relocating the History of Science. Essays in Honor of Kostas Gavroglu*. Dordrecht: Springer, ss. 177–192.
- Holton, Gerald 1979: Einstein’s Model for Constructing a Scientific Theory. [In:] Peter C. Aichelburg, Roman U. Sexl (eds.), *Albert Einstein. His Influence on Physics, Philosophy and Politics*. Braunschweig/Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn, ss. 109–136.
- Howard, Don A.; Giovanelli, Marco 2019: Einstein’s Philosophy of Science. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2019 Edition), Edward N. Zalta (ed.). Dostęp online: <https://plato.stanford.edu/archives/fall2019/entries/einstein-philsience>. First published Wed Feb 11, 2004; substantive revision Fri Sep 13, 2019.
- Hoyer, Ulrich 1980: Von Boltzmann zu Planck. *Archive for History of Exact Sciences* 23(1) (26.XI.1980), ss. 47–86. Dostęp online: <https://www.jstor.org/stable/41133587>.

- Huang, Kerson 1987: *Statistical Mechanics* (2nd ed.). New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore: John Wiley & Sons.
- Hund, Friedrich 1967 / 1974, 1975, 1980: *Geschichte der Quantentheorie*. Mannheim: Bibliographisches Institut; English translation by Gordon Reece 1974: *The history of quantum theory*. London: Harrap; Italian translation by G. Longo 1975: *Storia della teoria dei quanta*. Bollona: Bollati Boringhieri; Japan translation by Kazuo Yamazaki 1978; Russian translation 1980: *Istoriia kvantovoj teorii*. Kiev: Naukova Dumka.
- Hunle, Paul A. 1972: The coming of age of Erwin Schrödinger: His quantum statistics of ideal gases. *Archive for History of Exact Sciences* 17, ss. 165–192. Dostęp online: <https://www.jstor.org/stable/41133485>.
- Jammer, Max 1966: *The conceptual development of quantum mechanics*. New York: McGraw-Hill. Partially Dostęp online: <https://archive.org/details/conceptual-develo0000jamm>.
- Kastler, Alfred 1983: On the Historical Development of the Indistinguishability Concept for Microparticles. [In:] Alwyn van der Merwe (ed.), *Old and New Questions in Physics, Cosmology, Philosophy and Theoretical Biology: Essays in Honor of Wolfgang Yourgrau* (New York, Plenum Press), ss. 607–623.
- Katzir, Shaul; Lehner, Christoph; Renn, Jürgen (eds.) 2013: *Traditions and Transformations in the History of Quantum Physics*. HQ–3: Third International Conference on the History of Quantum Physics, Berlin, June 28 – July 2, 2010 “Max Planck Research Library for the History and Development of Knowledge”. Proceedings 5. <https://library.um.edu.mo/ebooks/b28308190.pdf>.
- Klein, Martin J. (ed.) 1959a: *Paul Ehrenfest: collected scientific papers*. North-Holland, Amsterdam; New York: Interscience.
- Klein, Martin J. 1962: Max Planck and Beginnings of the Quantum Theory. *Archive for the History of Exact Sciences* I, ss. 459–479.
- Klein, Martin J. 1964: Einstein and the Wave-Particle Duality. *The Natural Philosopher* 3, ss. 3–49. <https://www.informationphilosopher.com/solutions/scientists/klein/Klein-Einstein-Wave-Particle.pdf>.
- Kojevnikov, Alexei 1999: Freedom, Collectivism, and Quasiparticles: Social Metaphors in Quantum Physics. *Historical Studies in the Physical and Biological Sciences* 29(2), ss. 295–331. DOI: [10.2307/27757812](https://doi.org/10.2307/27757812). Dostęp online: <https://www.jstor.org/stable/27757812>; <https://history.ubc.ca/wp-content/uploads/sites/23/2019/06/1999quasiparticles.pdf>.
- Kojevnikov, Alexei 2002: Einstein’s Fluctuation Formula and the Wave-Particle Duality. [In:] Yuri Balashov and Vladimir Vizgin, eds., *Einstein Studies in Russia. Einstein Studies*, Vol. 10. Boston, Basel, Birkhäuser. The Center for Einstein

Studies. Printed in the United States, ss. 181–228. Dostęp online: https://www.researchgate.net/profile/Alexei_Kojevnikov/publication/241603110_Einstein's_Fluctuation_Formula_and_the_Wave-Particle_Duality/links/5e4a1c74a6fdccd965ac3e66/Einsteins-Fluctuation-Formula-and-the-Wave-Particle-Duality.pdf.

Kokowski, Michał 1996: Copernicus and the Hypothetico-Deductive Method of Correspondence Thinking, *Theoria et Historia Scientiarum*, ss. 7–101. DOI: 10.12775/th.s.1996.002. Dostęp online: <https://www.researchgate.net/publication/321453456>.

Kokowski, Michał 2001: *Thomas S. Kuhn (1922–1996) a zagadnienie rewolucji kopernikowskiej*. Warszawa: Wydawnictwa IHN PAN. ISBN 83-86062-02-9, ss. 397.

Kokowski, Michał 2004: *Copernicus's Originality: Towards Integration of Contemporary Copernican Studies*. Warsaw – Cracow: Instytut Historii Nauki PAN, 2004. ISBN 83-86062-27-4, ss. XIV + 314.

Kokowski, Michał 2012: *Copernicus, Arabic Science, and the Scientific (R)evolution*. [In:] Arun Bala (ed.), *Asia, Europe, and the Emergence of Modern Science: Knowledge Crossing Boundaries*. New York: Palgrave Macmillan, ss. 55–72. DOI:10.1057/9781137031730_4. Dostęp online: https://www.academia.edu/26667636/Copernicus_Arabic_Science_and_the_Scientific_R_evolution.

Kokowski, Michał 2015: Nota na temat pojmowania uogólnionej zasady korespondencji | Note on the understanding of the generalized correspondence principle. PKHN PAU XIV, ss. 327–329 | ss. 330–331. DOI: [10.4467/23921749PKHN_PAU.16.015.5271](https://doi.org/10.4467/23921749PKHN_PAU.16.015.5271).

Kokowski, Michał 2019: The divergent histories of Bose-Einstein statistics and the forgotten achievements of Władysław Natanson (1864–1937). *Studia Historiae Scientiarum* 18, ss. 327–464. DOI: [10.4467/2543702XSHS.19.012.11018](https://doi.org/10.4467/2543702XSHS.19.012.11018).

Kokowski, Michał 2021: Ladislas Natanson and Alfred Landé versus Planck's law, the Boltzmann-Planck-Natanson statistics and the Bose statistics. *Studia Historiae Scientiarum* 20, pp. 439–507. DOI: [10.4467/2543702XSHS.21.014.14045](https://doi.org/10.4467/2543702XSHS.21.014.14045).

Konieczny, Matthew J. 2011: The peculiarities of the Polish scientific discourse. [In:] Marija Wakounig, Karlo Ruzicic-Kessler (eds.), *From the Industrial Revolution to World War II in East Central Europe* (Münster: LIT Verlag), ss. 240–258. Partially Dostęp online: <https://books.google.pl/books?id=0uAcNbQehOoC&pg=PA240>.

Konieczny, Matthew J. 2012: “Polska fizyka” i droga do europejskiej teorii kwantowej: Władysław Natanson i I Konferencja Solvaya w 1911 roku. (Paper given during a scientific meeting of the Commission of History of Science of the Polish Academy of Arts and Sciences, Kraków, 24.6.2009). *Prace Komisji Historii Nauki PAU* XI, ss. 69–78. Dostęp online: <http://pau.krakow.pl/PKHN-PAU/pkhn-pau-XI-2012-4.pdf>.

- Krutkow, George 1914a: Aus der Annahme unabhängiger Licht-quanten folgt die Wiensche Strahlungsformel. *Physikalische Zeitschrift* 15, ss. 133–136.
- Krutkow, George 1914b: Bemerkung zu Herrn Wolfkes Note: Welche Strahlungsformel folgt aus der Annahme der Lichtatome? *Physikalische Zeitschrift* 15, ss. 363–364.
- Kuhn, Thomas Samuel 1962 (2d ed. 1970): *The Structure of Scientific Revolution*. Chicago: The University of Chicago Press.
- Kuhn, Thomas Samuel 1977: Mathematical versus Experimental Traditions in the Development of Physical Science. *The Journal of Interdisciplinary History* 7, ss. 1–31.
- Kuhn, Thomas S. 1978: *Black-body theory and the quantum discontinuity 1894–1912*. Oxford: Oxford University Press. Partially Dostęp online: <https://books.google.pl/books?id=zYUhVHzlr2IC>.
- Kuhn, T. S.; Heilbron, J. L.; Forman, P.; Allen, L. 1967: *Sources for history of quantum physics. An inventory and report*. Philadelphia: The American Philosophical Society.
- Kunz, Milan 1989: How to distinguish distinguishability: physical and combinatorial definitions. *Physics Letters A* 135(8–9), ss. 421–424. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(89\)90039-X](https://doi.org/10.1016/0375-9601(89)90039-X).
- Landé, Alfred 1925: Lichtquanten und Kohärenz. *Zeitschrift für Physik* 33, ss. 571–578 (Eingegangen am 19. Juni 1925). DOI:10.1007/BF01328337.
- Landé, Alfred 1926a: Zur Quantentheorie der Strahlung. *Zeitschrift für Physik* 35, ss. 317–322 (Eingegangen am 13. November 1925). DOI: 10.1007/BF01380146.
- Landé, Alfred 1926b: *Die neuere Entwicklung der Quantentheorie*. “Wissenschaftliche Forschungsberichte, Naturwissenschaftliche Reihe”, Band 5. Dresden und Leipzig: Theodor Steinkopff. Dostęp online: <https://repository.aip.org/islandora/object/nbla%3A6669/datastream/PDF/>.
- Landé, Alfred 1988: *Selected Scientific Papers of Alfred Landé*. Edited by P. Barut, Alwyn van der Merwe. Dordrecht, Boston, Lancaster, Tokyo: D. Reidel Publishing Company. Partially Dostęp online: <https://books.google.pl/books?id=2ZPqCAAAQBAJ>.
- Lange, Bogdan 1992a: Znaczenie nierozróżnialności kwantów energii przy wyprowadzaniu formuły Plancka. *Kwartalnik Historii Nauki i Techniki* 37(1), ss. 11–22. Dostęp online: http://bazhum.muzhp.pl/media//files/Kwartalnik_Historii_Nauki_i_Techniki/Kwartalnik_Historii_Nauki_i_Techniki-r1992-t37-n1/Kwartalnik_Historii_Nauki_i_Techniki-r1992-t37-n1-s11-22/Kwartalnik_Historii_Nauki_i_Techniki-r1992-t37-n1-s11-22.pdf.
- Lange, Bogdan 1992b: Statystyka kwantów jako podstawa dla interpretacji teoriopoznawczej mechaniki kwantowej. *Kwartalnik Historii Nauki i Techniki*

- 37(2), ss. 123–132. Dostęp online: http://bazhum.muzhp.pl/media//files/Kwartalnik_Historii_Nauki_i_Techniki/Kwartalnik_Historii_Nauki_i_Techniki-r1992-t37-n2/Kwartalnik_Historii_Nauki_i_Techniki-r1992-t37-n2-s123-132/Kwartalnik_Historii_Nauki_i_Techniki-r1992-t37-n2-s123-132.pdf.
- Lange, Bogdan 1997: Natanson's Statistics versus Bose-Einstein Statistics as the Basis for Theory-Cognitive Quantum Mechanics. *Physics Essays* 10, ss. 524–527.
- Laue, Max von 1914: Die Freiheitsgrade von Strahlenbündeln. *Annalen der Physik* 349(16), ss. 1197–1212. Dostęp online: <https://pl.booksc.xyz/book/376356/9dcd54>.
- Lehner, Christoph; Renn, Jürgen; Joas, Christian; Badino, Massimiliano 2007: Schrödinger's Way to Wave Mechanics. MPIWG. Dostęp online: http://quantum-history.mpiwg-berlin.mpg.de/eLibrary/hq1_talks/waveMech/25_lehner_renn/lehner_renn_hq-1_pres.
- Lorentz 1910: Alte und neue fragen der Physik. *Physikalische Zeitschrift* 11, ss. 205–257. https://www.lorentz.leidenuniv.nl/IL-publications/sources/Lorentz_PZ_1910.pdf.
- Majkowska, Rita; Fialek, Elżbieta (red.) 2009: *Władysław Natanson 1864–1937*. „W Służbie Nauki” nr 15. Kraków: Polska Akademia Umiejętności, Archiwum Nauki PAN i PAU.
- Mehra, Jagdish 1972: “The Golden Age of Theoretical Physics”: P.A.M. Dirac's Scientific Work from 1924 to 1933. The International Nuclear Information System. INIS Repository. CPT-I14 ORD-3992-64 February 1972. Dostęp online: <https://inis.iaca.org/collection/NCLCollectionStore/Public/03/027/3027986.pdf>.
- Mehra, Jagdish 1975: Satyendra Nath Bose, 1 January 1894 – 4 February 1974. *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society* 21, ss. 116–154. <https://doi.org/10.1098/rsbm.1975.0002>. Dostęp online: <https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rsbm.1975.0002>.
- Mehra, Jagdish 2001: *The Golden Age of Theoretical Physics* ((Boxed Set of 2 Volumes)). 10.1142/9789812810588.
- Mehra, Jagdish; Rechenberg, Helmut 1982/2001: *The Historical Development of Quantum Theory*, Vol. 1, Part 2. *The Quantum Theory of Planck, Einstein, Bohr and Sommerfeld: Its Foundations and the Rise of Its Difficulties 1900–1925*. Springer. Partially Dostęp online: <https://books.google.pl/books?id=8tUVMsSc9wAC>.
- Monaldi, Daniela 2009: A note on the prehistory of indistinguishable particles. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* 40 (2009) 383–394. DOI: doi:10.1016/j.shpsb.2009.09.005.

- Monaldi, Daniela 2013: Early Interactions of Quantum Statistics and Quantum Mechanics. [W:] *Traditions and Transformations in the History of Quantum Physics: Third International Conference on the History of Quantum Physics, Berlin, June 28–July 2, 2010*, ed. Shaul Katzir, Christoph Lehner, and Jürgen Renn (Berlin: Edition Open Access, Max Planck Institute for the History of Science, 2013), ss. 125–147.
- Monaldi, Daniela 2019: The Statistical Style of Reasoning and the Invention of Bose-Einstein Statistics. *Berichte zur Wissenschaftsgeschichte* 42(4), ss. 307–337. DOI: [10.1002/bewi.201900015](https://doi.org/10.1002/bewi.201900015).
- Nagasawa, Nobukata 2018: On social and psychological aspects of a negligible reception of Natanson's article of 1911 in the early history of quantum statistics. *Studia Historiae Scientiarum* 17, ss. 391–419. DOI: <https://doi.org/10.4467/2543702XSHS.18.014.9334>.
- Natanson, Ladislas (Władysław) 1911a (presented: 6 March 1911; published: circa 10 April 1911): O teorii statystycznej promieniowania. – On the Statistical Theory of Radiation. *Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie, Classe des Sciences mathématiques et naturelles. Série A: Sciences mathématiques / Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse. Reihe A: Mathematische Wissenschaften*, ss. 134–148.
- Natanson, Władysław 1911b: O promieniowaniu (19 lipca 1911). [In:] Księga pamiątkowa XI Zjazdu Lekarzy i Przyrodników Polskich w Krakowie, 18 – 22 lipca 1911 {Proceedings of the 11th Congress of Polish physicians and natural scientists in Krakow, 18–22 July 1911} (Kraków: Komitet Gospodarczy, 1911), ss. 144–160. Dostęp online: <https://jbc.bj.uj.edu.pl/dlibra/doccontent?id=278801>.
- Natanson, Ladislas (Władysław) 1911c (received: 29 April 1911; published: 15 August 1911): Über die statistische Theorie der Strahlung. *Physikalische Zeitschrift* 12, ss. 659–666 it is a translation of Natanson's first paper (1911a); the translation was made by Max Iklé, when the chief editor of the journal was Friedrich Krüger.
- Natanson, Ladislas (Władysław) 1912a: O promieniowaniu (1st vers.) – Offprint of Natanson 1911b.
- Natanson, Ladislas (Władysław) 1912b (presented on 8 January 1912; published: April 1912): O zawartości energii w ciałach materjalnych. – On the Energy-content of material bodies. *Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie, Classe des Sciences mathématiques et naturelles. Série A: Sciences mathématiques / Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse. Reihe A: Mathematische Wissenschaften*, ss. 95–102.
- Natanson, Władysław 1913: Zasady Teorii Promieniowania (Principes de la Théorie du Rayonnement). *Prace Matematyczno-Fizyczne* 24, ss. 1–88. Warsza-

wa: Wydawnictwo Redakcji Prac Matematyczno-Fizycznych. Dostęp online: „Polska Biblioteka Wirtualna Nauki”, „Kolekcja Matematyczna”, <http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/pmf/pmf24/pmf2411.pdf>.

Natanson, Władysław 1923: O sprzecznościach w obrazie natury. Przemówienie na posiedzeniu inauguracyjnym pierwszego Zjazdu Fizyków i Chemików Polskich w Warszawie w dniu 4-tym kwietnia 1923 roku. *Przegląd Warszawski* 3, ss. 5–8. Dostęp online: <http://mbc.cyfrowemazowsze.pl/dlibra/docmeta-data?id=27684>.

Natanson, Władysław 1924a: Oblicze natury: odczyty, przemówienia i szkice. Kraków: Krakowska Spółka Wydawnicza. Dostęp online: <http://www.sbc.org.pl/Content/83937/i329249.pdf>.

Natanson, Władysław 1924b: O promieniowaniu. [In:] Natanson 1924a, ss. 125–151.

Navarro, Luis; Pérez, Enric 2004: Paul Ehrenfest on the Necessity of Quanta (1911): Discontinuity, Quantization, Corpuscularity, and Adiabatic Invariance. *Archive for History of Exact Sciences* 58 (2004), ss. 97–141. DOI: 10.1007/s00407-003-0068-z. https://www.researchgate.net/profile/Enric_Perez/publication/226763445_Paul_Ehrenfest_on_the_Necessity_of_Quanta_1911_Discontinuity_Quantization_Corpuscularity_and_Adiabatic_Invariance/links/551027450cf2a7335c847c53/.

Norton, John D. 1993: The Determination of Theory by Evidence: The Case for Quantum Discontinuity, 1900–1915. *Synthese* 97(1), ss. 1–31. Dostęp online: <https://www.jstor.org/stable/20117829>.

Pais, Abraham 1979: Einstein and the Quantum Theory. *Review of Modern Physics* 51(4), p. 863. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.51.863>.

Pais, Abraham 1982: *Subtle is the Lord. The science and life of Albert Einstein*. Oxford and New York: Clarendon, Oxford University Press.

Pais, Abraham 1986: *Inward Bound. Of mater and forces in the physical world*. Oxford: Clarendon Press, New York: Oxford University Press.

Passon, Oliver; Grebe-Ellis, Johannes 2017: Planck’s radiation law, the light quantum, and the prehistory of indistinguishability in the teaching of quantum mechanics. *European Journal of Physics* 38 (035404) (10pp). DOI: <https://doi.org/10.1088/1361-6404/aa6134>.

Pauli, Wolfgang 1940: The connection between spin and statistics. *Physical Review* 58, ss. 716–722. Dostęp online: http://hermes.ffn.ub.es/luisnavarro/nuevo_maletin/Pauli_spin_statistics_1940.pdf.

Pérez, Enric; Sauer, Tilman 2010: Einstein’s quantum theory of the monatomic ideal gas: non-statistical arguments for a new statistics. *Archive for History*

- of *Exact Sciences* 64, ss. 561–612. Dostęp online ArXiv: <https://arxiv.org/pdf/1004.5567.pdf>.
- Pešić, Peter D. 1991a: The principle of identity and the foundations of quantum theory. I. The Gibbs paradox. *American Journal of Physics* 59 (11), ss. 971–974. DOI: [10.1119/1.16653](https://doi.org/10.1119/1.16653).
- Pešić, Peter D. 1991b: The principle of identity and the foundations of quantum theory. II. The role of identity in the formation of quantum theory. *American Journal of Physics* 59 (11), ss. 975–978. DOI: [10.1119/1.16654](https://doi.org/10.1119/1.16654). <https://static1.squarespace.com/static/549e4558e4b07c07777e8a60/t/5b350996758d46120bc08b02/1530202519824/Principle+of+identity+I+Gibbs+paradox.pdf>.
- Pickering, Andrew (ed.) 1992: *Science as Practice and Culture*. Chicago and London: The University of Chicago Press.
- Planck, Max 1900: Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspectrum, *Verhandlungen der Deutsche Physikalische Gesetzen* 2, ss. 237–245. <http://www.fisicafundamental.net/relicario/doc/planck1.pdf>. Translated into English in D. ter Haar (ed.), *The Old Quantum Theory*, Pergamon Press, 1967.
- Planck, Max 1901: Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum. *Annalen der Physik* 4, ss. 553–563. DOI: [10.1002/andp.19013090310](https://doi.org/10.1002/andp.19013090310).
- Planck, Max 1906: *Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung*. Leipzig: Verlag von Johann Ambrosius-Barth. Dostęp online: <https://archive.org/download/vorlesungenberd04plangoog/vorlesungenberd04plangoog.pdf>.
- Planck, Max 1912/1914, 1958: La loi du rayonnement noir et l'hypothèse des quantités élémentaires d'action. [In:] Solvay, E.; Langevin P.; Broglie, M.D.D. & Institut international de physique Solvay 1912, *La Theorie du Rayonnement et les Quanta. Rapports et Discussions de la Reunion Tenue a Bruxelles du 30 Octobre au 3 Novembre 1911, Sous les Auspices de M. E. Solvay*, ss. 93–114, 115–132. German translation: Die Gesetze der Wärmestrahlung und die Hypothese der elementaren Wirkungsquanten. [In:] *Die Theorie der Strahlung und der Quanten: Verhandlungen auf einer von E. Solvay einberufenen Zusammenkunft (30. Oktober bis 3. November 1911), mit einem Anhang über die Entwicklung der Quantentheorie vom Herbst 1911 bis zum Sommer 1913*, ss. 77–94. Herausgegeben von A. [Arnold] Eucken. Halle a.S.: Wilhelm Knapp, 1914. “Abhandlungen der Deutschen Bunsen-Gesellschaft für Angewandte Physikalische Chemie” 3. Bd., Nr. 7; reprinted in 1958: Max Planck, *Physikalische Abhandlungen und Vorträge: Aus Anlass seines 100. Geburtstages (23. April 1958)*. Herausgegeben vom Verband Deutscher Physikalischer Gesellschaften und der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften. Braunschweig: Vieweg, vol. 2, ss. 267–286.
- Planck, Max 1958: *Physikalische Abhandlungen und Vorträge: Aus Anlass seines 100. Geburtstages (23. April 1958)*. Herausgegeben vom Verband Deutscher Physikalischer Gesellschaften und der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften. Braunschweig: Vieweg, 3 volumes.

- Planck, Max 1972: *Planck's Original Papers in Quantum Physics. German and English edition*. Annotated by Hans Kangro, translated by D. ter Haar and Stephen G. Brush. London: Taylor and Francis.
- Poincaré, Henri 1896: *Calcul des Probabilités, leçons professées pendant le deuxième semestre 1893–1894*. Paris: Gauthier-Villars.
- Porter, Theodore M. 1981: A Statistical Survey of Gases: Maxwell's Social Physics. *Historical Studies in the Physical Sciences* 12(1), ss. 76–116. DOI: [10.2307/27757490](https://doi.org/10.2307/27757490). Dostęp online: <https://www.jstor.org/stable/27757490>.
- Porter, Theodore M. 1986: *The Rise of Statistical Thinking 1820–1900*. Princeton University Press.
- Porter, Theodore M. 1994: The Death of the Object: Fin de siècle Philosophy of Physics. [In:] Dorothy Ross (ed.), *Modernist Impulses in the Human Sciences 1870–1930*. Baltimore and London: The Johns Hopkins University Press, ss. 128–151.
- Porter, Theodore M. 2002: Statistics and Physical Theories. [In:] Mary Jo Nye (ed.), *The Cambridge History of Science*. Vol. 5. *The Modern Physical and Mathematical Sciences*. Cambridge University Press, ss. 488–504.
- Raman, V.V.; Forman, Paul 1969: Why Was It Schrödinger Who Developed de Broglie's Ideas? *Historical Studies in the Physical Sciences* 1, ss. 291–314. DOI: [10.2307/27757299](https://doi.org/10.2307/27757299).
- Rayleigh, John William Strutt, Baron 1871/ 1899a: Note on the explanation of Coronas, as given in Verdet's *Leçons d'optique physique, and other works. Proceedings of the London Mathematical Society* III, ss. 267–269 / *Scientific Papers* I [1869–1881]. London: C.J. Clay and Sons, Cambridge University Press Warehouse, ss. 76 [–79]. Dostęp online: <https://archive.org/details/scientificpaper01raylgoog>.
- Rayleigh, John William Strutt, Baron 1880 / 1899b: On the resultant of a large number of vibrations of the same pitch and of arbitrary phase. *Philosophical Magazine* 10 (60), ss. 73–78 / *Scientific Papers* I [1869–1881]. London: C.J. Clay and Sons, Cambridge University Press Warehouse, ss. 491[–496]; <https://archive.org/details/scientificpaper01raylgoog/page/n516/mode/2up>.
- Rayleigh, John William Strutt, Baron 1884: *The Theory of Sound*. Volume One. Unabridged Second Revised Edition. Historical introduction by Robert B. Lindsay.
- Rayleigh, John William Strutt, Baron 1888/1902: §4. Resultant of a Large Number of Vibrations of Arbitrary Phase. [In:] *Wave Theory of Light. Encyclopedia Britannica*, 9th ed., Vol. 24, p. 429 / *Scientific Papers* III, London: Cambridge University Press Warehouse; ss. 52[–54]. Dostęp online: <https://archive.org/details/scientificpapers03rayliala/page/52/mode/2up>.

- Rayleigh, John William Strutt, Baron 1899/ 1903: On James Bernoulli's theorem in probabilities. *Philosophical Magazine* 47 (285), ss. 246–251 / *Scientific Papers IV* (1892–1901), ss. 370–375. Dostęp online: <https://archive.org/details/cu31924073426888/page/n391/mode/2up>.
- Rechenberg, Helmut 1982: Landé, Alfred. [W:] *Neue Deutsche Biographie* 13 (Berlin: Duncker & Humblot), ss. 494–496. Dostęp online: <https://www.deutsche-biographie.de/pnd189548169.html#ndbcontent>.
- Rosen, Edward 1939 (2nd ed. 1959; 3rd ed. 1971): *Three Copernican Treaties: the Commentariolus of Copernicus, the Letter against Werner, the Narratio prima of Rheticus*. 3rd ed. New York, 1971: Octagon Books.
- Saunders, Simon 2005/2006: On the Explanation for Quantum Statistics. *Arxiv* (15 November 2015). Dostęp online: <https://arxiv.org/abs/quant-ph/0511136v1> / *Studies in the History and Philosophy of Modern Physics* 37, ss. 192–211. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.shpsb.2005.11.002>.
- Saunders, Simon 2013: Indistinguishability. [In:] R. Batterman (ed.), *Oxford Handbook in Philosophy of Physics*. Oxford University Press.
- Saunders, Simon 2020: The Concept 'Indistinguishable'. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.shpsb.2020.02.003>.
- Schrödinger, Erwin 1921: Isotopie und Gibbssches Paradoxon. *Zeitschrift für Physik* 5, ss. 163–166. DOI: 10.1007/bf01329248.
- Schrödinger, Erwin 1925: Bemerkungen über die statistische Entropiedefinition beim idealen Gas. *Preußische Akademie der Wissenschaften (Berlin). Physikalisch-mathematische Klasse. Sitzungsberichte*, ss. 434–441.
- Schrödinger, Erwin 1926: Zur Einsteinschen Gastheorie. *Physikalische Zeitschrift* 27, ss. 95–101.
- Schrödinger, Erwin 1948: *Statistical thermodynamics*. Cambridge: At the University Press.
- Schrödinger, Erwin 1984: *Gesammelte Abhandlungen*. Band 1 *Beiträge zur statistischen Mechanik*. Wien (Austria): Verlag der Oesterreichischen Akademie der Wissenschaften.
- Schweber, Silvan S. 2016: On Kuhnian and Hacking-Type Revolutions. [In:] Alexander Blum, Kostas Gavroglu, Christian Joas, Jergen Renn (eds.), *Shifting paradigms: Thomas S. Kuhn and the History of Science*. Berlin: Edition Open Access. Max Planck Research Library for the History and Development of Knowledge, ss. 337–346, <http://edition-open-access.de/proceedings/8/>.
- Sciortino, Luca 2017: On Ian Hacking's Notion of Style of Reasoning. *Erkenntnis* 82(2), ss. 243–264. DOI: [10.1007/s10670-016-9815-9](https://doi.org/10.1007/s10670-016-9815-9). Dostęp online:

https://www.researchgate.net/publication/303807983_On_Ian_Hacking%27s_Notion_of_Style_of_Reasoning

Smekal, A. 1926: Statistische und molekulare Theorie der Wärme. In: Bennewitz K. et al. (eds.) *Theorien der Wärme. Handbuch der Physik*, vol 9. Berlin, Heidelberg: Springer. Dostęp online: https://doi.org/10.1007/978-3-642-51358-9_3.

Smekal, A. 1926: *Allgemeine Grundlagen der Quantenstatistik und Quantentheorie*. [In:] Sommerfeld A. (eds) *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag. DOI: 10.1007/978-3-663-16029-8_10.

Spalek, Józef 2005a: Statystyka Natansona-Bosego-Einsteina? Krytyczne tak. *Zwoje (The Scrolls)*2(43), ss. 15. Dostęp online: <https://web.archive.org/web/20060916110943/http://www.zwoje-scrolls.com/zwoje43/text10p.htm>.

Spalek, Józef 2005b: Statystyka Natansona-Bosego-Einsteina? Krytyczne tak. *Postępy Fizyki* 56(4), ss. 146–153. Dostęp online: <https://pf.ptf.net.pl/PF-2005-4/docs/PF-2005-4.pdf>.

Spalek, Józef 2020: The Bose-Einstein statistics: Remarks on Debye, Natanson, and Ehrenfest contributions and the emergence of indistinguishability principle for quantum particles. *Studia Historiae Scientiarum* 19, ss. 423–441. DOI: [10.4467/2543702XSHS.20.013.12569](https://doi.org/10.4467/2543702XSHS.20.013.12569).

Stachel, John 2000/2002: Einstein’s Light Quantum Hypothesis, or Why Didn’t Einstein Propose a Quantum Gas a Decade-and-a-Half Earlier? [In:] Don Howard, John J. Stachel (eds.), *Einstein: The Formative Years, 1879–1909* {“Einstein Studies”, vol. 8} (Boston: Birkhäuser, New York: Springer-Verlag), ss. 231–251. Reprinted in: Stachel, John J., *Einstein from “B” to “Z”*. {“Einstein Studies”, vol. 9} (Boston: Birkhäuser, 2002), ss. 427–444.

Średniawa, Bronisław 1985: *History of theoretical physics at Jagiellonian University in Cracow in XIXth Century and in the first half of the XXth Century*. “Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Jagiellońskiego”, DCCXXVII, “Prace Fizyczne”, Zeszyt 24. Warszawa – Kraków: PWN.

Średniawa, Bronisław 1996: Kontakty naukowe i współpraca polskich fizyków z Einsteinem. *Kwartalnik Historii Nauki i Techniki* 41(1), ss. 59–97. Dostęp online: http://bazhum.muzhp.pl/media//files/Kwartalnik_Historii_Nauki_i_Techniki/Kwartalnik_Historii_Nauki_i_Techniki-r1996-t41-n1/Kwartalnik_Historii_Nauki_i_Techniki-r1996-t41-n1-s59-98/Kwartalnik_Historii_Nauki_i_Techniki-r1996-t41-n1-s59-98.pdf.

Średniawa, Bronisław 2000: Władysław Natanson (1864–1937). [W:] *Złota Księga Uniwersytetu Jagiellońskiego, Wydział Matematyki i Fizyki*, pod red. B. Szafirskiego, Kraków: Uniwersytet Jagielloński, ss. 447–458. Dostęp online: https://ruj.uj.edu.pl/xmlui/bitstream/handle/item/242953/sredniawa_wladyslaw_natanson_1864-1937_2000.pdf.

- Średniawa, Bronisław 2006: Scientific contacts of Polish physicists with Albert Einstein. [In:] M. Kokowski (ed.), *The Global and the Local: The History of Science and the Cultural Integration of Europe. Proceedings of the 2nd ICESHHS (Cracow, Poland, September 6–9, 2006)*, ss. 252–269. Dostęp online: http://www.2iceshs.cyfronet.pl/2ICESHS_Proceedings/Chapter_10/R-2_Sredniawa.pdf.
- Sudarshan, E. C. G.; Mehra, Jagdish 1970: Classical statistical mechanics of identical particles and quantum effects. *International Journal of Theoretical Physics* 3, ss. 245–251.
- Swendsen, Robert H. 2015: The ambiguity of “distinguishability” in statistical mechanics. *American Journal of Physics* 83(6), ss. 545–554.
- Wali, Kameshwar C. 2006: The Man Behind Bose Statistics. *Physics Today* 59(10), ss. 46–52. DOI: [10.1063/1.2387088](https://doi.org/10.1063/1.2387088). Dostęp online: <https://www.researchgate.net/publication/243391503>.
- Waniek, Magdalena; Hentschel, Klaus 2011: Nicht zu unterscheiden. Vor hundert Jahren erkannte der polnische Physiker Władysław Natanson als Erster die für Quantenstatistiken grundlegende Voraussetzung der Ununterscheidbarkeit. *Physik Journal* 10(5), ss. 39–44. Dostęp online: <https://www.pro-physik.de/restricted-files/101901>.
- Wasowski, Józef 1924: Apoteoza nauki. *Oblicze natury: odczyty, przemówienia i szkice*. Przez dra Władysława Natansona. Kraków, Krakowska Spółka Wydawnicza 1924 str 4nl. i 231 i nl (Review). *Wiadomości Literackie* Rok I Nr 14, 6 kwietnia 1924, s. 3. Dostęp online (Los Angeles Museum of the Holocaust): http://www.lamoth.info/?p=digitallibrary/getfile&id=3272&usg=AOvVaw3cwpzk_I9cp51UHUqciqrR.
- Wessels, Linda 1979: Schrödinger’s route to wave mechanics. *Studies in History and Philosophy of Science* 10(4), ss. 311–340. DOI: [https://doi.org/10.1016/0039-3681\(79\)90018-9](https://doi.org/10.1016/0039-3681(79)90018-9).
- Whittaker, Edmund Taylor 1953: *A History of the Theories of Aether and Electricity*. Vol. 2. The Modern Theories 1900–1926. Harper Torchbooks. The Science Library. London: Nelson.
- Wigner, Eugene 1927a: Über nicht kombinierende Terme in der neueren Quantentheorie. *Zeitschrift für Physik* 40(7), ss. 492–500.
- Wigner, Eugene 1927b: Über nicht kombinierende Terme in der neueren Quantentheorie. II. Teil 40 (11–12), ss. 883–892.
- Wikipedia* 2021: Quantum. Dostęp online: <https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum>.